☙ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 16 ❧
PRÉPARATION BB

Tout élève poursuivra ses efforts pour améliorer les résultats de son DM14 ou traitera l'exercice suivant.

Exercice 1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \qquad t \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(3u_{n+1} - u_n) \qquad \text{pour tout n } \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3.

$$u_2 = \frac{1}{2}(3-0) = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

2. A l'aide d'un tableur, calculer les 30 premiers termes de la suite.
Quelle conjecture peut-on faire quant au comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	U_0	0,0000		U_8	1,9922		U_16	2,0000		U_24	2,000
3	U_1	1,0000		U_9	1,9961		U_17	2,0000		U_25	2,000
4	U_2	1,5000		U_10	1,9980		U_18	2,0000		U_26	2,000
5	U_3	1,7500		U_11	1,9990		U_19	2,0000		U_27	2,000
6	U_4	1,8750		U_12	1,9995		U_20	2,0000		U_28	2,000
7	U_5	1,9375		U_13	1,9998		U_21	2,0000		U_29	2,000
8	U_6	1,9688		U_14	1,9999		U_22	2,0000		U_30	2,000
9	U_7	1,9844		U_15	1,9999		U_23	2,0000			

On conjecture que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

3. On pose , pour tout entier n,

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Vérifier que , pour tout $n \in \mathrm{N}$,

$$U_{n+1} = AU_n$$

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3u_{n+1} - u_n) \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathrm{N}$,

$$U_n = A^n U_0$$

Notons $\mathscr{P}(n) : U_n = A^n U_0$

- ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a $A^0 U_0 = U_0$ donc la propriété est initialisée à partir de $n = 0$.
- ***Hérédité*** : Montrons que si $U_n = A^n U_0$ alors $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

donc la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

- ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ étant initialisée et héréditaire on en déduit que pour tout entier naturel n on a :

$$U_n = A^n U_0$$

4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer PQ et QP.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même

$$QP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Vérifier que la matrice QAP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$QAP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nQ$$

Notons $\mathscr{P}'(n)$ cette propriété :

- ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a $PD^0Q = PQ = I_2$ et $A^0 = I_2$ donc la propriété est initialisée à partir de $n = 0$
- ***Hérédité*** : Montrons que si $PD^nQ = A^n$ alors $PD^{n+1}Q = A^{n+1}$.
  $A^{n+1} = A \times A^n = APD^nQ$. Or, $D = QAP \Longrightarrow PD = PQAP \Longrightarrow PD = AP \Longrightarrow PDQ = APQ = A$ donc :

$$A^{n+1} = PDQPD^nQ = PDD^nQ = PD^{n+1}Q$$

- ***Conclusion*** : $\mathscr{P}'$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a :

$$A^{n+1} = PD^{n+1}Q$$

(d) En admettant que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$, déterminer l'expression de A^n.

$$A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & -1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

5. Déduire des questions 3.b et 4.d., une expression de u_n en fonction de n.

On a donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & -1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \\ 2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & -1+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Par conséquent pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

6. Etudier la convergence de la suite (u_n)

   Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et au final :

$$\lim_{n\to+\infty} 2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$