∾ DEVOIR MAISON 15 ∾
NOMBRES COMPLEXES-EQUATIONS

Tout élève traitera au moins deux exercices.

Exercice 1. ♠

On pose $P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + \alpha z - 13i$, où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $P(i) = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z-i)(z^2+az+b)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

***Solutions*:**

1. $P(i) = i^3 - (6+i)\times i^2 + \alpha\times i - 13i = -i + (6+i) + \alpha i - 13i$

   Donc $P(i) = 0 \iff 6 + \alpha i - 13i = 0 \iff \dots \iff \alpha = 13+6i$. D'où $\boxed{P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i}$

2.
$$\begin{aligned}(z-i)(z^2+az+b) &= z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib \\ &= P(z) \iff \begin{cases} a - i = -(6+i) \\ b - ia = 13+6i \\ -ib = -13i \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b + 6i = 13+6i \\ b = 13 \end{cases}\end{aligned}$$

   On vérifie dans la deuxième équation, on retrouve bien $b = 13$. Donc $\boxed{P(z) = (z-i)(z^2-6z+13)}$

3.
$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff z - i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 6z + 13 = 0 \\ &\iff \boxed{z_1 = i} \quad \text{ou} \quad \Delta = -16 \\ &\qquad\qquad z_2 = \frac{6 - i\sqrt{16}}{2} = \dots = \boxed{z_2 = 3-2i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_3 = 3+2i}\end{aligned}$$

On peut donc dire que $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ ie $\boxed{P(z) = (z-i)(z-3+2i)(z-3-2i).}$

Exercice 2. ♠♠

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z + z' = 5 \\ zz' = 6.5 \end{cases}$

Solutions :

1. $\begin{cases} z+z'=2 \\ zz'=17 \end{cases} \iff \begin{cases} z'=2-z \\ z(2-z)=17 \end{cases} \iff \begin{cases} z'=2-z \\ 2z-z^2-17=0 \end{cases}$ $\Delta = 4-4\times(-1)\times(-17) = -64$

   Donc $z_1 = \dfrac{-2+8i}{-2} = 1-4i$ et $z_2 = 1+4i$

   D'où $z_1' = 2-z_1 = 2-(1-4i) = 1+4i$ et $z_2' = 2-z_2 = \cdots = 1-4i$ $\boxed{\mathscr{S} = \{(1-4i;1+4i);(1+4i;1-4i)\}}$

   Les rôles de z et z' étant symétriques, il est logique d'avoir deux couples de solutions symétriques.

2. $\begin{cases} z+z'=5 \\ zz'=6.5 \end{cases} \iff \begin{cases} z'=5-z \\ z(5-z)=6.5 \end{cases} \iff \begin{cases} z'=5-z \\ 5z-z^2-6.5=0 \end{cases}$ $\Delta = 25-4\times(-1)\times(-6.5) = -1$

   Donc $z_1 = \dfrac{-5+i}{-2} = \dfrac{5-i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{5+i}{2}$

   D'où $z_1' = 5 - z_1 = 5 - \dfrac{5-i}{2} = \dfrac{10-5+i}{2} = \dfrac{5+i}{2}$ et $z_2' = 5 - z_2 = \cdots = \dfrac{5-i}{2}$

   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{5-i}{2};\dfrac{5+i}{2}\right);\left(\dfrac{5+i}{2};\dfrac{5-i}{2}\right)\right\}}$

   Les rôles de z et z' étant symétriques, il est logique d'avoir deux couples de solutions symétriques.

Exercice 3. ♠♠♠

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$$

1. Démontrer que (E) a une solution imaginaire pure.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2+az+b)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Solutions :

1. *Sans indication supplémentaire, on teste des solutions évidentes.*

   Commençons par $z = i$: $\quad i^3 + (-8+i)i^2 + (17-8i)i + 17i = -i - (-8+i) + 17i + 8 + 17i \neq 0$

   Essayons $z = -i$: $\quad (-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i) \times (-i) + 17i = i - (-8+i) - 17i - 8 + 17i = 0$

   Donc $z = -i$ est une solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$

   La lecture de la question 2. aurait pu nous aiguiller *... Une autre méthode est présentée dans l'exercice 4.*
   Attention, $z = i$ n'est pas solution car l'équation n'est pas à coefficients réels !

2. $$\begin{aligned}(z+i)(z^2+az+b) &= z^3 + az^2 + bz + iz^2 + iaz + ib \\ &= z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i \iff \begin{cases} a+i = -8+i \\ b+ia = 17-8i \\ ib = 17i \end{cases} \iff \begin{cases} a = -8 \\ b - 8i = 17-8i \\ b = 17 \end{cases}\end{aligned}$$

   On vérifie dans la deuxième équation, on retrouve bien $b = 17$.

   Donc $\boxed{z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)}$

3. $$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\iff z + i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 8z + 17 = 0 \\ &\iff \boxed{z_1 = -i} \quad \text{ou} \quad \Delta = -4 \quad z_2 = \frac{8 - i\sqrt{4}}{2} = \cdots = \boxed{z_2 = 4 - i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_3 = 4 + i}\end{aligned}$$

Exercice 4. ♠♠♠

On définit la fonction polynôme f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
   On pourra poser $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, puis mettre $f(iy)$ sous forme algébrique et enfin traduire la nullité de $f(iy)$ par un système.
2. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

   $$f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

***Solutions* : Exercice 12**

1. On pose $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. Alors $z \in i\mathbb{R}$ et z est solution de $f(z) = 0$ si et seulement si

$$(iy)^4 - 6(iy)^3 + 14(iy)^2 - 24(iy) + 40 = 0 \iff y^4 + 6iy^3 - 14y^2 - 24iy + 40 = 0$$

Or un nombre complexe vaut 0 si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle valent 0.

On a donc $f(z) = 0 \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\left(y^4 + 6y^3 i - 14y^2 - 24yi + 40\right) = 0 \\ \mathrm{I}m\left(y^4 + 6iy^3 - 14y^2 - 24iy + 40\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 - 14y^2 + 40 = 0 \\ 6y^3 - 24y = 0 \end{cases}$

Résolvons déjà la deuxième équation qui est très simple :
$6y^3 - 24y = 0 \iff 6y(y^2 - 4) = 0 \iff y = 0$ ou $y = 2$ ou $y = -2$.
Regardons alors si la première équation est vérifiée dans chacun des trois cas précédents.

– Si $y = 0$ alors $y^4 - 14y^2 + 40 \neq 0$ Donc $y = 0$ n'est pas solution du système, ni de $f(z) = 0$ donc.
– Si $y = 2$ alors $y^4 - 14y^2 + 40 = 16 - 46 + 40 = 0$. Donc $y = 2$ est solution du système et donc de $f(z) = 0$.
– Idem pour $y = -2$, puisque les exposants sont pairs.

Ainsi, $z = 2i$ et $z = -2i$ sont les deux solutions imaginaires pures de $f(z) = 0$.

On pouvait aussi résoudre la première équation avec le changement de variable $\mathrm{Y} = y^2$.
On trouve alors comme solutions $y = \pm\sqrt{10}$ *et* $y = \pm 2$.
Les solutions du système sont donc les solutions communes aux deux équations, à savoir $y = \pm 2$.

2. ***Grâce à cette question, on sait que l'on a la précédente juste !***

$$\begin{aligned} (z^2 + az + b)(z^2 + 4) &= z^4 + 4z^2 + az^3 + 4az + bz^2 + 4b \\ &= f(z) \iff \begin{cases} a = -6 \\ 4 + b = 14 \\ 4a = -24 \\ 4b = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b = 10 \\ a = -6 \\ b = 10 \end{cases} \quad \text{Donc} \quad \boxed{f(z) = (z^2 - 6z + 10)(z^2 + 4)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff z^2 - 6z + 10 = 0 \quad &&\text{ou} \quad z^2 + 4 = 0 \\ &\iff \Delta = -4 &&\text{ou} \quad \boxed{z_3 = 2i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_4 = -2i} \\ & z_1 = \frac{6 - i\sqrt{4}}{2} = \cdots = \boxed{z_1 = 3 - i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_2 = 3 + i} && \end{aligned}$$