Correction Devoir Maison 14
Retour de l'arithmétique

Tout élève en fera au moins pour 3 ♠.

Exercice 1. Nombres premiers ♠♠

1. Démontrer l'égalité dite « égalité de Sophie Germain » :

$$n^4+4m^4=(n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn)$$

On a :

$$(n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn)=n^4+2n^2m^2-2mn^3+2mn^3+4m^4-4m^3n+2mn^3+2m^3n-2m^2n^2=n^4+4m^4$$

2. En utilisant cette égalité, répondre aux questions (indépendantes) suivantes :

(a) Démontrer que le nombre $p=2^{1794}+723^4$ n'est pas un nombre premier.

$$n=2^{897\times2}+723^4=4^{897}+723^4=4\times4^{896}+723^4=723^4+4\times\left(4^{224}\right)^4$$

D'après l'égalité de Sophie Germain pour $n=723$ et $m=4^{224}$ on obtient :

$$p=2^{1794}+723^4=723^4+4\times\left(4^{224}\right)^4=(723^2+2\left(4^{224}\right)^2+2\times4^{224}\times723)(723^2+2\left(4^{224}\right)^2-2\times\left(4^{224}\right)\times723)$$

Les deux nombres constituant ce produit sont strictement supérieur à 1 par conséquent p n'est pas un nombre premier puisqu'il admet au moins un diviseur différent de lui et de 1.

(b) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, n^4+4 est-il premier ?
D'après l'égalité de Sophie Germain on a :

$$n^4+4=\left(n^2+2+2n\right)\left(n^2+2-2n\right)$$

Si n^4+4 est un nombre premier alors $n^2+2+2n=\pm1$ ou $n^2+2-2n=\pm1$.
Or, $n^2+2+2n=1\iff n^2+2n+1=0\iff(n+1)^2=0\iff n=-1$.
De même $n^2+2+2n=-1\iff(n+1)^2+1=-1$ ce qui n'est pas possible.
De même $n^2+2-2n=1\iff(n-1)^2=0\iff n=1$.
Et enfin $n^2+2-2n=-1\iff(n-1)^2+1=-1$ ce qui n'est pas possible.
Nous venons de prouver que si n^4+4 est premier alors $n=1$ ou $n=-1$.
Réciproquement si $n=\pm1$ alors $n^4+4=5$ qui est premier.
Conclusion :n^4+4 est premier si et seulement si $n=\pm1$.

Exercice 2. Nombre parfaits ♠♠♠

Définition : Dire qu'un entier naturel n est parfait signifie que la somme de tous ses diviseurs positifs est égale à $2n$.

1. Montrer que :

$$\forall x\neq1,\qquad\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Indication : On pourra calculer $(1-x)\sum_{i=0}^{n}x^i$.

$$(1-x)\sum_{i=0}^{n}x^i=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)=1+x+x^2+\cdots+x^n-x-x^2-x^3-\cdots-x^{n+1}=1-x^{n+1}$$

Pour tout $x\neq1$ on a donc :

$$\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2. Démontrer que 28 est un nombre parfait.
La liste des diviseurs positifs de 28 est :

$$\mathscr{D}_{28}=\{1;2;4;7;14;28\}$$

De plus $1+2+4+7+14=14+14=28$ donc 28 est un nombre parfait.

3. p désigne un nombre premier tel que $q=2^p-1$ soit premier.

(a) Déterminer les diviseurs positifs de 2^{p-1}.
La liste des diviseurs positifs de 2^{p-1} est :

$$\mathscr{D}_{2^{p-1}} = \{1;2;2^2;\ldots;2^{p-1}\}$$

(b) Déterminer les diviseurs positifs de 2^p-1.
On suppose que 2^p-1 est un nombre premier donc la liste des diviseurs premiers de 2^p-1 est :

$$\mathscr{D}_{2^p-1} = \{1;2^p-1\}$$

(c) Calculer la somme des diviseurs positifs de l'entier $\mathrm{E}^p = 2^{p-1}(2^p-1)$.
Remarque : Les nombres E_p sont appelés *nombres d'Euclide*.
La liste des diviseurs positifs de E_p est :

$$\mathscr{D}_{\mathrm{E}_p} = \{1;2;2^2;\ldots;2^{p-1};2^p-1;2\times(2^p-1);2^2\times(2^p-1);2^3\times(2^p-1);\ldots;2^{p-1}\times(2^p-1)\}$$

Et la somme de ses diviseurs positifs vaut :

$$1+2+2^2+\cdots+2^{p-1}+\left(1+2+2^2+\cdots+2^{p-1}\right)(2^p-1)$$

Or, d'après la question initiale on a :

$$1+2+2^2+\cdots+2^{p-1} = \frac{1-2^p}{1-2} = 2^p-1$$

donc la somme des diviseurs positifs de E_p vaut :

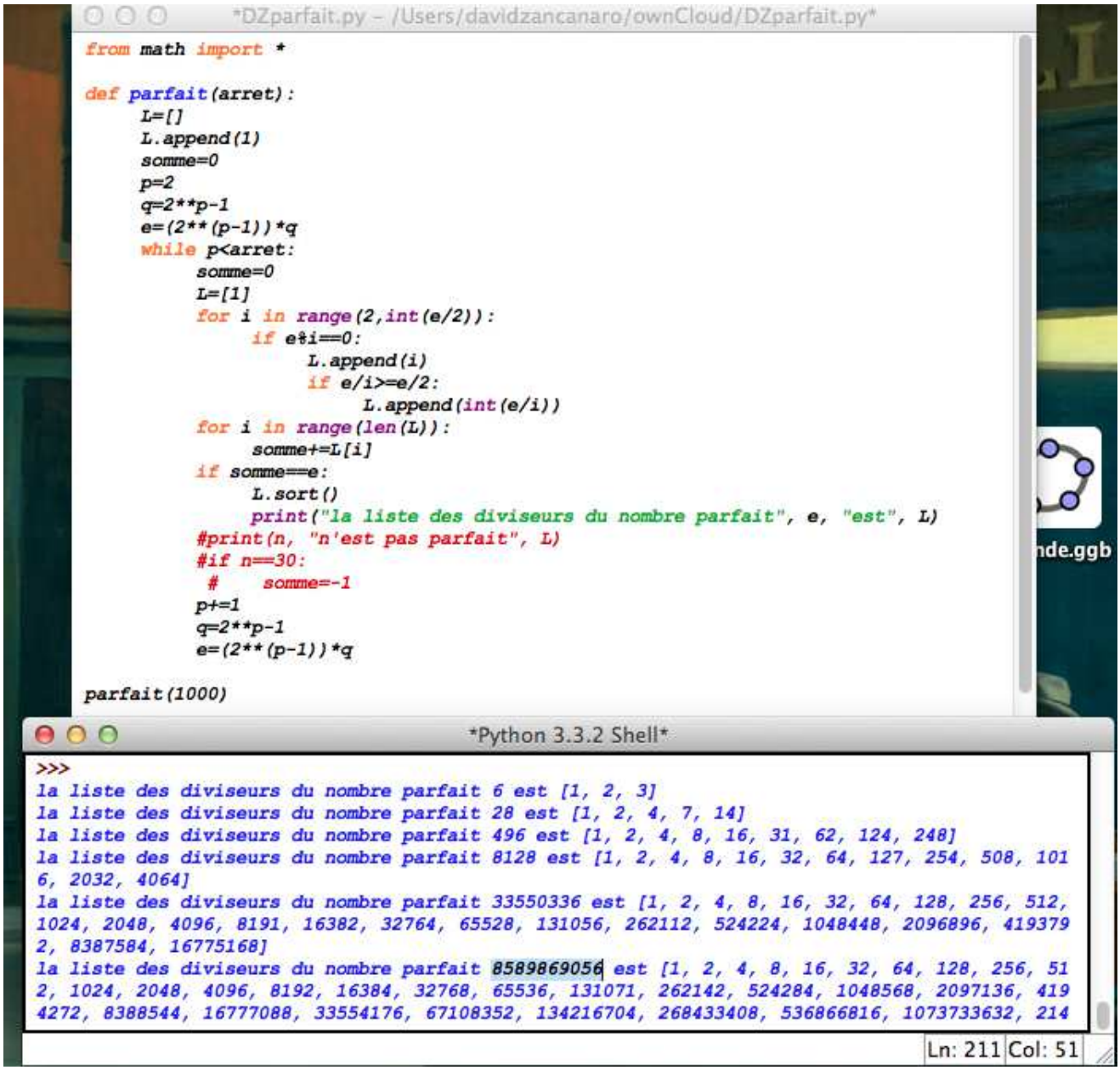
$$2^p-1+(2^p-1)(2^p-1) = (2^p-1)(1+2^p-1) = 2^p(2^p-1)$$

(d) En déduire que $2^{p-1}(2^p-1)$ est un nombre parfait.

$$2\times\mathrm{E}_p = 2\times2^{p-1}(2^p-1) = 2^p(2^p-1)$$

Par conséquent, par définition, E_p est un nombre parfait puisque son double est égal à la somme de ses diviseurs positifs.

(e) Déterminer alors trois nombres parfaits.
L'algorithme suivant en donne même quelques-uns de plus.



4. ♠♠♠♠♠

p et q désignent des nombres premiers distincts supérieurs ou égaux à 3 et α et β sont des entiers naturels non nuls ; on note $n = p^\alpha q^\beta$.

(a) Déterminer les diviseurs positifs de p^α et de q^β.

La liste des diviseurs positifs de p^α est :

$$\mathscr{D}_{p^\alpha} = \{1; p; p^2; \ldots; p^\alpha\}$$

La liste des diviseurs positifs de p^β est :

$$\mathscr{D}_{q^\beta} = \{1; q; q^2; \ldots; q^\beta\}$$

(b) Démontrer que la somme S des diviseurs positifs de n est donnée par :

$$S = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \times \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}$$

La liste des diviseurs positifs de n est donc :

$$\mathscr{D}_n = \{1; p; p^2; \ldots; p^\alpha; q; qp; qp^2; \ldots; qp^\alpha; \ldots\ldots; q^\beta; q^\beta p; q^\beta p^2; \ldots; q^\beta p^\alpha\}$$

On en déduit alors que la somme des diviseurs positifs de n vaut :

$$\left(1+p+p^2+\cdots+p^\alpha\right)+\left(q+qp+qp^2+\cdots+qp^\alpha\right)+\cdots+\left(q^\beta+q^\beta p+q^\beta p^2+\cdots+q^\beta p^\alpha\right)$$

ce qui donne :

$$\left(1+p+p^2+\cdots+p^\alpha\right)+q\left(1+p+p^2+\cdots+p^\alpha\right)+\cdots+q^\beta\left(1+p+p^2+\cdots+p^\alpha\right)$$

Par conséquent on obtient :

$$\left(1+p+p^2+\cdots+p^\alpha\right)\left(1+q+q^2+\cdots+q^\beta\right)$$

En utilisant la première question on obtient :

$$\frac{1-p^{\alpha+1}}{1-p}\times\frac{1-q^{\beta+1}}{1-q}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\times\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}$$

(c) Démontrer que n est parfait, si et seulement si $p^\alpha q^\beta\left((p-2)(q-2)-2\right)=1-p^{\alpha+1}-q^{\beta+1}$.

n est parfait si et seulement si :

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\times\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}=2p^\alpha q^\beta \iff \left(p^{\alpha+1}-1\right)\left(q^{\beta+1}-1\right)=2p^\alpha q^\beta(p-1)(q-1)$$

n est donc parfait si et seulement si :

$$p^{\alpha+1}q^{\beta+1}-p^{\alpha+1}-q^{\beta+1}+1=2p^\alpha q^\beta(p-1)(q-1)\iff 1-p^{\alpha+1}-q^{\beta+1}=2p^\alpha q^\beta(p-1)(q-1)-p^{\alpha+1}q^{\beta+1}$$

De plus :

$$2p^\alpha q^\beta(p-1)(q-1)-p^{\alpha+1}q^{\beta+1}=p^\alpha q^\beta\left(2(p-1)(q-1)-pq\right)$$

Et enfin :

$$2(p-1)(q-1)-pq=(2p-2)(q-1)-pq=2pq-2p-2q+2-pq=pq-2p-2q+2$$

Tout comme on a :

$$(p-2)(q-2)-2=pq-2p-2q+4-2=pq-2p-2q+2$$

Ce qui permet, enfin, de conclure que n est parfait si et seulement si :

$$p^\alpha q^\beta\left((p-2)(q-2)-2\right)=1-p^{\alpha+1}-q^{\beta+1}$$

(d) En étudiant le signe de chaque membre, démontrer qu'il ne peut pas exister de nombres parfaits impairs dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne contienne que deux facteurs premiers distincts.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un nombre parfait$n$ impair dont la décomposition en facteurs premiers ne contient que deux facteurs premiers disctincts.

Dans un tel cas, il existe donc deux nombres premiers p et q tels que :

$$n=p^\alpha q^\beta$$

Puisque n est impair p et q sont différents de 2, donc p et q sont supérieurs ou égaux à 3. Si on note p le

plus petit premier des deux on a même :

$$p \geq 3 \qquad \text{et} \qquad q \geq 5$$

Puisque n est parfait on a :

$$p^{\alpha} q^{\beta} \left((p-2)(q-2)-2\right) = 1 - p^{\alpha+1} - q^{\beta+1}$$

Puisque $p \geq 3$ alors $p^{\alpha+1} \geq 3^2$ et $q^{\beta+1} \geq 5^2$, par conséquent :

$$1 - p^{\alpha+1} - q^{\beta+1} < 0$$

De plus $p-2 \geq 3-2 = 1$ et $q-2 \geq 5-2 = 3$, donc $(p-2)(q-2)-2 \geq 1 \times 3 - 2 = 1 > 0$. Par conséquent :

$$p^{\alpha} q^{\beta} \left((p-2)(q-2)-2\right) > 0$$

Or, un nombre strictement négatif ne peut être égal à un nombre strictement positif.
Conclusion : Il est impossible qu'un nombre n impairs dont la décomposition en facteurs premiers contient uniquement deux facteurs premiers distincts soit parfait.

(e) Démontrer que s'il existe un nombre parfait impair, il est supérieur à 105.
Un nombre impair produit d'au moins 3 nombre premiers distincts vaut au minimum :

$$3 \times 5 \times 7 = 21 \times 5 = 105$$

S'il existe un nombre parfait impair il est donc supérieur à 105. *Remarque* : On ignore, à l'heure actuelle, s'il existe des nombres parfaits impairs.