∾ Correction Devoir Maison 13 ∾
Etude de fonction - Exponentielle

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1. ♠♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera une équation.

   On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc

   $$\lim_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1 \qquad \text{et} \lim_{x \to -\infty} e^x + 1 = 1$$

   Par quotient on obtient :

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

   Nous en déduisons l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

   Pour tout nombre réel x on a :

   $$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x\left((1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left((1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

   Et puisque d'après le cours on a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ on peux en déduire que :

   $$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et l'existence d'une deuxième asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ dont on précisera une équation.

   Utilisons l'expression algébrique de $f(x)$ trouvée à la question précédente. On a :

   $$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$

   Par composition on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et on en déduit :

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$$

   Ainsi $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

3. Démontrer que pour tout réel x on a :

   $$f(-x) = -f(x)$$

   Que peut-on en déduire pour la fonction f et pour sa représentation graphique ?

   Pour tout réel x on a :

   $$f(-x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{1 + e^x} = -f(x)$$

   Par conséquent la fonction f est impaire, par conséquent $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis étudier son signe. En déduire le tableau de variations de f.

   Pour tout réel x, f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

   $$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

   On vient d'utiliser le fait que $\left(e^x\right)^2 = e^{2x}$.

On sait que pour tout réel x on a $e^x > 0$, par conséquent :

$$e^{2x} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus $e^x + 1 \geq 1 \Rightarrow (e^x+1)^2 > 0$, par quotient et en appliquant la règle des signes on obtient :

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Exercice 2. ♠♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2-2x}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Que peut-on en déduire ?

   Pour tout $x \neq 0$ ona :

$$x^2 - 2x = x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

   De plus :

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$$

   Par produit on obtient :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 - 2x = +\infty$$

   De plus :

$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} e^{\mathrm{X}} = +\infty$$

   Par composition on en déduit que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2-2x} = +\infty$$

   Compte tenu du fait que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$, on peut en déduire qu'elle n'est pas monotone et qu'elle admet au moins un minimum relatif.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et déterminer son signe.

   On sait que $\left(e^u\right)' = u'e^u$. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ on a pour tout réel x :

$$f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$$

   Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$ on a pour tout réel x :

$$e^{x^2-2x} > 0$$

   $f'(x)$ est du signe de $2x-2$ dont voici le tableau résumant son signe en fonction de x :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. Dresser le tableau de variations de f.

   Immédiatement de la question précédente découle le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow e^{x^2-2x} = 1 \Longleftrightarrow e^{x^2-2x} = e^0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0$$

   ce qui équivaut à $x = 0$ ou $x = 2$.