∽ Correction du Devoir Maison 13 ∾
Matrice - vers le bac...

Exercice 1. ♠♠♠

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013+n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

$$v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n \qquad \text{et} \qquad c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n$$

2. Soit la matrice $\text{A} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $\text{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $\text{Y} = \text{AX}$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $\text{Y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

   On a :

$$\text{Y} = \text{AX} \Longleftrightarrow \text{Y} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $c = 0,95a + 0,01b$ et $d = 0,05a + 0,99b$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $\text{X}_{n+1} = \text{AX}_n$ où $\text{X}_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $\text{X}_n = \text{A}^n\text{X}_0$.

3. Soient les matrices $\text{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer PQ et QP. En déduire la matrice B telle que $\text{PB} = \text{I}_2$ et $\text{BP} = \text{I}_2$.

$$\text{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   et

$$\text{QP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   Ainsi $\text{PQ} = \text{QP} = 6\text{I}_2$, par conséquent $\text{P}\dfrac{1}{6}\text{Q} = \dfrac{1}{6}\text{QP} = \text{I}_2$ ce qui permet de conclure que $\text{B} = \dfrac{1}{6}\text{Q} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{5}{6} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$

(b) Vérifier que la matrice BAP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$\text{BAP} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{564}{600} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{47}{50} \end{pmatrix}$$

(c) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\text{A}^n = \text{PD}^n\text{B}$.

Notons $\mathscr{Z}(n)$ la propriété $\text{A}^n = \text{PD}^n\text{B}$.

- ***Initialisation*** : pour $n = 1$:
  On sait que $\text{D} = \text{BAP}$ et $\text{PB} = \text{BP} = \text{I}_2$ par conséquent de $\text{D} = \text{BAP}$ en multipliant à gauche par P on obtient :
  $$\text{PD} = \text{PBAP} = \text{AP}$$
  puis en multipliant à droite par B on obtient :
  $$\text{PDB} = \text{APB} = \text{A}$$
  La propriété Z est vraie au rang 1.
- ***Hérédité*** : Montrons l'implication suivante :
  $$\text{A}^n = \text{PD}^n\text{B} \Longrightarrow \text{A}^{n+1} = \text{PD}^{n+1}\text{B}$$
  $$\text{A}^{n+1} = \text{A}^n \times \text{A} = \text{PD}^n\text{BA} = \text{PD}^n\text{B} \times \text{PDB} = \text{PD}^n\text{BPDB}$$
  Or $\text{BP} = \text{I}_2$ d'où :
  $$\text{A}^{n+1} = \text{PD}^n\text{DB} = \text{PD}^{n+1}\text{B}$$
  La propriété Z est héréditaire c'est-à-dire dès lors qu'elle est vraie au rang n elle l'est au rang $n+1$.
- ***Conclusion*** : La propriété Z est initialisée à partir de $n = 1$ et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

(d) Calculer en fonction de n, la matrice A^n.

$$\text{A}^n = \text{PD}^n\text{B} = \text{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{47^n}{50^n} \end{pmatrix}\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{47^n}{50^n} \end{pmatrix}\text{B}$$

c'est-à-dire :

$$\text{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{47^n}{50^n} \\ 5 & \frac{47^n}{50^n} \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+5\times\frac{47^n}{50^n} & 1+\frac{47^n}{50^n} \\ 5-5\times\frac{47^n}{50^n} & 5+\frac{47^n}{50^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{47^n}{50^n} & \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\frac{47^n}{50^n} \\ \frac{5}{6}-\frac{5}{6}\times\frac{47^n}{50^n} & \frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{47^n}{50^n} \end{pmatrix}$$

(e) Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

On sait que $\text{X}_n = \text{A}^n\text{X}_0$ et $\text{X}_0 = 250000 \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$, on en déduit que :

$$\text{X}_n = 250000 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{47^n}{50^n} & \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\frac{47^n}{50^n} \\ \frac{5}{6}-\frac{5}{6}\times\frac{47^n}{50^n} & \frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{47^n}{50^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}+\frac{5}{20}\times 0,94^n+\frac{7}{60}+\frac{7}{60}\times 0,94^n \\ \frac{5}{20}-\frac{5}{20}\times 0,94^n+\frac{35}{60}+\frac{7}{60}\times 0,94^n \end{pmatrix}$$

Autrement dit on a :

$$v_n/250000 = \frac{1}{20}+\frac{5}{20}\times 0,94^n+\frac{7}{60}+\frac{7}{60}\times 0,94^n \qquad \text{et} \qquad c_n/250000 = \frac{5}{20}-\frac{5}{20}\times 0,94^n+\frac{35}{60}+\frac{7}{60}\times 0,94^n$$

or,

$$\lim_{n\to+\infty} 0,94^n = 0$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n/250000 = \frac{1}{20} + \frac{7}{60} = \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n/250000 = \frac{5}{20} + \frac{35}{60} = \frac{5}{6}$$

On en déduit qu'à long terme un sixième de cette population vivra en ville et le reste à la campagne.