# ~ DEVOIR MAISON 12 ~
# TESTER LA QUALITÉ D'UN OBJET - PROBABILITÉ

**Tout élève traitera au moins un exercice.**

**Exercice 1.** ♠♠

Dans une entreprise une étude statistique a montré que le pourcentage de pièces défectueuses fabriqués est égal à 2% . Pour éliminer les pièces défectueuses, un test de qualité est mis en place dont les résultats sont les suivants :

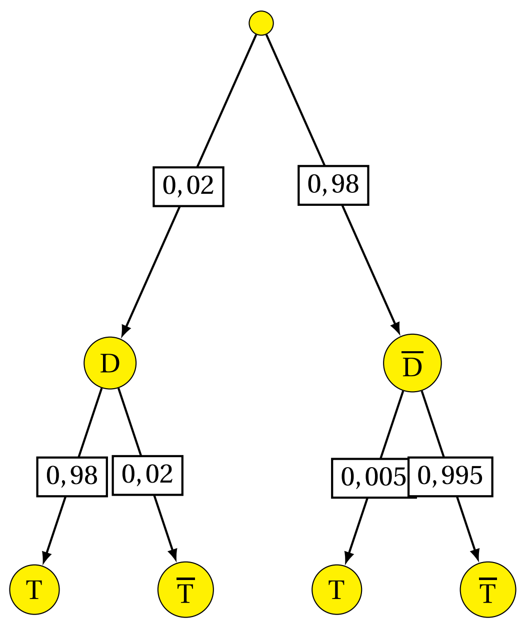
- le test élimine 98% des pièces défectueuses ;
- le test élimine $0,5\%$ des pièces non défectueuses.

On tire une pièce au hasard d'après le processus du test.

On note respectivement D et T les événements :« la pièce tirée est défectueuse« et « le test élimine la pièce ».

**PARTIE A.**

1. Réaliser un arbre pondéré qui modélise cette expérience.




2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit éliminée.

$$p(T) = p(D\cap T) + p(\overline{D}\cap T) = 0,02\times 0,98 + 0,98\times 0,005 = 0,98\times 0,025 = 0,0245$$

3. Montrer que la probabilité qu'une pièce soit éliminée à tort est égale à $0,0049$.

Une pièce est éliminée à tort si elle n'est pas défectueuse et éliminée en plus :

$$p(\overline{D}\cap T) = 0,98\times 0,005 = 0,0049$$

4. Sachant qu'une pièce n'est pas éliminée, calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse, on donnera la valeur exacte du résultat et l'arrondi à $10^{-4}$.

$$p_{\overline{T}}(D) = \frac{p(D\cap\overline{T})}{p(\overline{T})} = \frac{0,02\times 0,02}{0,02\times 0,02 + 0,98\times 0,995} = \frac{0,0004}{0.9947} \simeq 0,0004$$

**PARTIE B.**

On suppose que toutes les pièces ont été testé, certaines ont donc été éliminé à tort ou à raison. On prélève au hasard (avec remise, ceci dit peu importe car la production est suffisamment grande qu'on puisse assimiler un tirage sans remise à un tirage avec remise ) 100 pièces. La variable aléatoire X compte le nombre de pièces défectueuses.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
   On prélève 100 pièces de cette production de manière indépendantes (puisqu'on assimile ceci à un tirage avec remise), X compte le nombre de pièces défectueuses, X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p$ est la probabilité de prélever une pièce défectueuse sachant que l'on ne l'a pas éliminée i.e $p = \dfrac{4}{9947}$ :

$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{B}\left(100, \frac{4}{9947}\right)$$

2. En déduire la probabilité qu'au moins deux pièces prélevées soit défectueuses.

$$p(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) - p(\mathrm{X} = 1) = 1 - \left(\frac{9943}{9947}\right)^{100} - \binom{100}{1} \times \frac{4}{9947} \times \left(\frac{9943}{9947}\right)^{99} \simeq 0,0007797$$

**Exercice 2.** ♠♠♠

Une usine fabricant des microprocesseurs pouvant présenter deux défauts A et B a réalisé une étude statistique donnant les résultat suivant :

- 9% des microprocesseurs présentent le défaut A ;
- 6% des microprocesseurs présentent le défaut B ;
- 3% des microprocesseurs présentent les deux défauts.

1. Les événements A :« le microprocesseur présente le défaut A »et B : « le microprocesseur présente le défaut B »sont-ils indépendants ?
   D'après l'énoncé on a :

$$p(\mathrm{A}) = 0,09 \qquad ; \qquad p(\mathrm{B}) = 0,06 \qquad \text{et} \qquad p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,03$$

   Les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$. Or $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = 0,09 \times 0,06 = 0,0054 \neq p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. Déterminer la probabilité que le microprocesseur présente le défaut B sachant qu'il présente le défaut A.

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

3. Quelle est la probabilité que le microprocesseur présente uniquement le défaut A ?
   Cette probabilité vaut :

$$p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,09 - 0,03 = 0,06$$

4. Déterminer $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$.
   Puisque $p(\mathrm{A}) = 0,09$ on a immédiatement $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - 0,09 = 0,91$.
   De plus

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{B}) \Longleftrightarrow 0,03 + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = 0,06 \Longleftrightarrow p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = 0,03$$

   Par conséquent :

$$p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})}{p(\overline{\mathrm{A}})} = \frac{0,03}{0,91} = \frac{3}{91}$$

5. Quelle est la probabilité que le microprocesseur ne présente aucun défaut ?
   L'événement C : « le microprocesseur ne présente aucun défaut » est l'événement contraire de l'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
   Or,

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,09 + 0,06 - 0,03 = 0,12$$

   Par conséquent :

$$p(\mathrm{C}) = 1 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - 0,12 = 0,88$$