∽ Correction Devoir Maison 12 ∾
Matrice - Calculatoire...

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1. ♠♠♠

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $M \times N$ et $N \times M$.

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

   De même :

$$NM = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $A = aI_3 + bJ$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = J - 4I_3$$

   On choisit donc $a = -4$ et $b = 1$.

   (b) Vérifier que $J \times J = 3J$ et en déduire que $A \times A + 5A + 4I_3 = 0_3$
   Effectivement on observe que $J \times J = 3J$ puisque $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ D'après la question précédente on a

$$A = -4I_3 + J$$

   donc en multipliant par

$$A \times A + 5A + 4I_3 = (-4I_3 + J)(-4I_3 + J) + 5A + 4I_3 = 16I_3^2 - 4I_3J - 4JI_3 + J^2 + 5A + 4I_3 = 16I_3 - 8J + 3J + 5(-4I_3 + J) + 4I_3$$

   ce qui donne :

$$A \times A + 5A + 4I_3 = 16I_3 - 5J - 20I_3 + 5J + 4I_3 = 20I_3 - 20I_3 = 0_3$$

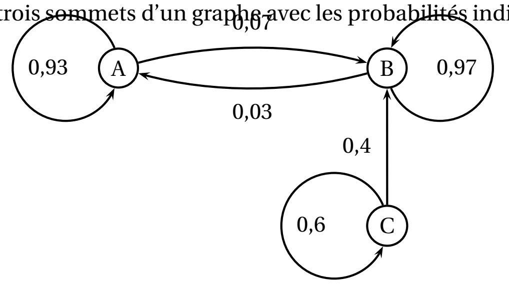
   (c) Déterminer une matrice B telle que $A \times B = I_3$
   D'après la question précédente on a :

$$A \times A + 5A + 4I_3 = 0_3 \iff A^2 + 5A = -4I_3 \iff A(A + 5I_3) = -4I_3 \iff A \times \frac{A + 5I_3}{-4} = I_3$$

$$B = \frac{A + 5I_3}{-4} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> 2. ♠♠

On considère un mobile se déplaçant sur les trois sommets d'un graphe avec les probabilités indiquées ci-dessous :



On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne donnant les probabilités que le mobile occupe les sommets A, B et C n instants après son départ.

1. Donner la matrice de transition T associée à ce graphe.

$$T = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$

2. S'il part du sommet A :

   (a) Calculer X_1 et X_2. S'il part de A alors $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$X_1 = TX_0 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 \\ 0,07 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Et donc :

$$X_2 = TX_1 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,93 \\ 0,07 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,867 \\ 0,133 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Démontrer par récurrence que $X_n = T^n X_0$. Démontrons la propriété $\mathscr{P}(n) : X_n = T^n X_0$ par récurrence.

   – ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a $T^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   – ***Hérédité*** : Montrons l'implication suivante :

$$X_n = T^n X_0 \Longrightarrow X_{n+1} = T^{n+1} X_0$$

On a :

$$X_{n+1} = TX_n = TT^nX_0 = T^{n+1}X_0$$

La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a :

$$X_n = T^nX_0$$

(c) Donner à l'aide de la calculatrice X_{30}.

$$X_{30} = T^{30}X_0 \simeq \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,67 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. S'il part du sommet B :

(a) Calculer X_1 et X_2. S'il part de B alors $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$X_1 = TX_0 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,97 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$X_2 = TX_1 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,97 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,053 \\ 0,943 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer par récurrence que $X_n = T^nX_0$.
Voir 2.(b).

(c) Donner à l'aide de la calculatrice X_{30}.

$$X_{30} = T^{30}X_0 \simeq \begin{pmatrix} 0,29 \\ 0,71 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. S'il part du sommet C :

(a) Calculer X_1 et X_2. S'il part de C alors $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc :

$$X_1 = TX_0 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$X_2 = TX_1 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 & 0 \\ 0,07 & 0,97 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,628 \\ 0,36 \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer par récurrence que $X_n = T^n X_0$.
Voir 2.(b).

(c) Donner à l'aide de la calculatrice X_{30}.

$$X_{30} = T^{30} X_0 \simeq \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,72 \\ 0 \end{pmatrix}$$