∽ Correction du devoir maison 11 ∾
Probabilité conditionnelle et indépendance.

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1. ♠♠

Idriss propose à Esther le jeu suivant pour une mise de deux euros : il met dans une urne 30 boules dont 20 sont de couleur noire et 10 de couleur rouge, puis Esther doit tirer au hasard, successivement et avec remise, cinq boules.
Si Esther tire au moins deux boules de couleur rouge, elle perd sa mise, sinon elle gagne trois fois sa mise.
La variable aléatoire G représente le gain (éventuellement négatif) d'Esther et la variable aléatoire X représente le nombre de boules rouge tirée par Esther.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X.
   On répète 5 fois de manière indépendante (puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli, X compte le nombre de boules rouges tirée par Esther donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire :
   $$X \hookrightarrow B\left(5, \frac{1}{3}\right)$$
2. Calculer $p(X \geq 2)$.
   On a :
   $$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$$
   Or, puisque $X \hookrightarrow B\left(5, \dfrac{1}{3}\right)$ on a :
   $$p(X = 1) = \binom{5}{1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{5 \times 2^4}{3^5} = \frac{80}{243}$$
   et
   $$p(X = 0) = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$
   On en déduit que :
   $$p(X \geq 2) = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{243 - 32 - 80}{243} = \frac{243 - 112}{243} = \frac{131}{243}$$
3. Recopier et compléter le tableau suivant :
   $p(G = 4) = p(X \geq 2) = \dfrac{131}{243}$ et $p(G = -2) = 1 - p(X \geq 2) = \dfrac{112}{243}$ d'où :

x_i	-2	4	Total
$p(G = x_i)$	$\frac{112}{243}$	$\frac{131}{243}$	1

4. Calculer E(G) et σ(G). Interpréter.
   $$E(G) = -2 \times \frac{112}{243} + 4 \times \frac{131}{243} = \frac{-224 + 524}{243} = \frac{300}{243} > 1$$
   Ce jeu est favorable sur le long terme, Esther peut espérer gagner un peu plus d'un euro en moyenne par partie.
   $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4 \times \frac{112}{243} + 16 \times \frac{131}{243} - \left(\frac{300}{243}\right)^2 = \frac{708192}{59049}$$
   et par conséquent :
   $$\sigma(X) = \sqrt{\frac{708192}{59049}} \simeq 3,5$$
5. Ecrire un algorithme simulant cette expérience.

```
import random

def jeu():
    nb_boule_rouge=0
    for i in range(5):#permet de tirer une boule 5 fois
        r = random.randint(1,30)# permet de choisir un nombre au hasard
                                # entre 1 et 30
        if r<11:# si on tire une boule rouge, on ajoute 1
                #
            nb_boule_rouge+=1
    if nb_boule_rouge>1:
        print("Victoire - On te doit 4 euros")
    else:
        print("defaite"')


jeu()
```

Exercice 2. ♠♠♠

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfum proposés.

1. Calculer la probabilité de l'événement A =« les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts ».
   Le second a 9 chances sur 10 de choisir un parfum différent du premier et le troisième a 8 chances sur 10 de choisir un parfum différent des deux qui le précédent ce qui permet de déduire que :
   $$p(\text{A}) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{72}{100}$$
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves.
   Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique. Interpréter.
   X peut prendre 1, 2 ou 3 comme valeur. On va donc déterminer les probabilités que $\text{X} = 1$, $\text{X} = 2$ et $\text{X} = 3$.
   D'après la première question on a $p(\text{X} = 3) = \frac{72}{100}$.
   Pour $\text{X} = 1$: Le premier choisit bien le parfum qu'il veut, cela ne changera rien, le second a une chance sur 10 de choisir le même parfum que le premier et le troisième a une chance sur 10 de choisir le même parfum que les deux précédents ce qui donne :
   $$p(\text{X} = 1) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$
   pour $\text{X} = 2$: le second a une chance sur dix de choisir le même parfum que le premier et le troisième a neuf chances sur dix de choisir un parfum différent des deux premiers. Il y a une autre possibilité le deuxième a neuf chance sur dix de choisir un parfum différent du premier et le troisième a deux chances sur dix de choisir un parfum identique à l'un des deux qui le précédent ce qui donne :
   $$p(\text{X} = 2) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{9+18}{100} = \frac{27}{100}$$
   On en déduit l'espérance :
   $$\text{E(X)} = 1 \times \frac{1}{100} + 2 \times \frac{27}{100} + 3 \times \frac{72}{100} = \frac{1+54+216}{100} = \frac{271}{100} = 2,71$$

puis

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{27}{100} + 9 \times \frac{72}{100} - \left(\frac{271}{100}\right)^2 = \frac{757}{100} + \frac{73441}{10000} = \frac{75700 + 73441}{10000} = \frac{149141}{10000}$$

D'où on déduit que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq \frac{386}{100} \simeq 3,9$$

En moyenne si on reproduit un grand nombre de fois cette expérience on peut espérer obtenir $2,7$ parfums différents. Compte tenu de la valeur très grande de l'écart-type les valeurs s'écarteront assez fortement de la moyenne, en moyenne...

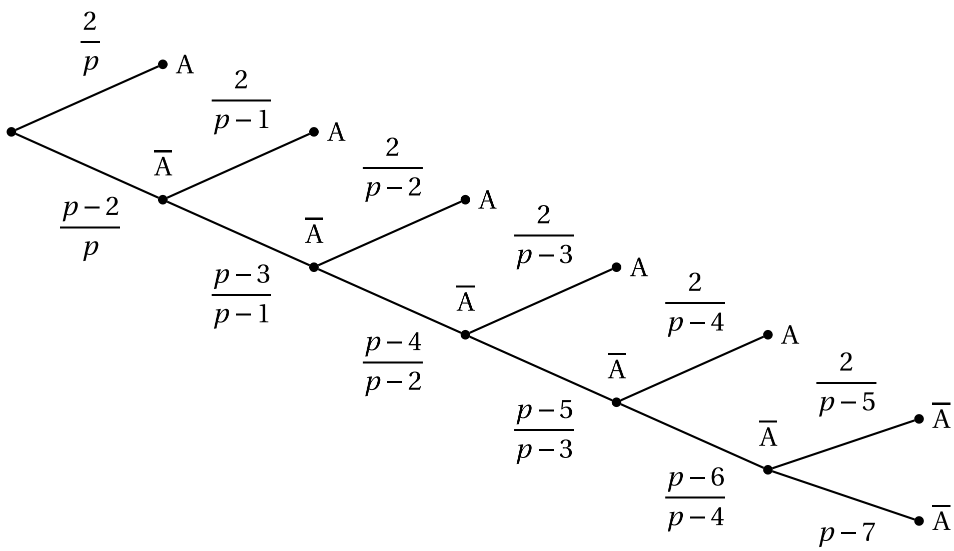
Exercice 3. ♠♠♠

Une des épreuves du jeu télévisé Fort Boyard consiste à ouvrir un coffre contenant p mygales sur lesquelles est collé un morceau de papier. Sur deux d'entre elles, le morceau de papier contient un code (le même sur ces deux mygales) utile au candidat pour la poursuite du jeu. Pour les autres, le papier est vierge. Le candidat doit obtenir ce code en temps limité.
On précise :

- le candidat choisit au hasard une mygale dans le coffre ;
- si le papier est vierge, le candidat le pose en dehors du coffre ;
- le temps accordé permet au candidat, s'il surmonte sa peur, de faire six tentatives pour obtenir le code.

Combien faut-il au maximum de mygales pour que la probabilité que le candidat trouve le code soit supérieure à $0,60$?

Notons A l'événement : « le candidat choisit une mygale qui contient un code »et notons p le nombre de mygale.
On obtient l'arbre suivant :



On cherche la valeur maximale de p telle que la probabilité que le candidat trouve le code soit supérieure à 0,6, cela revient à déterminer la valeur maximale de p telle que la probabilité que le candidat échoue à trouver le code soit inférieure à $0,4$ ce qui se traduit par :

$$p(\text{« le candidat échoue »}) = \frac{p-2}{p} \times \frac{p-2}{p-1} \times \frac{p-4}{p-2} \times \frac{p-5}{p-3} \times \frac{p-6}{p-4} \times \frac{p-7}{p-5} \leq 0,4$$

Ce qui revient à :

$$\frac{(p-6)(p-7)}{p(p-1)} \leq 0,4 \iff p^2 - 13p + 42 \leq 0,4p(p-1) \iff 0,6p^2 - 12,6p + 42 \leq 0$$

On cherche les racines de ce trinôme : $\Delta = 12,6^2 - 4 \times 0,6 \times 42 = 57,96$ d'où :

$$x_1 = \frac{12,6 - \sqrt{57,96}}{1,2} \simeq 4,2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{12,6 + \sqrt{57,96}}{1,2} \simeq 16,8$$

On en déduit le tableau de signe du trinôme :

p	0		x_1		x_2		$+\infty$
$0,6p^2-12,6p+42$		$+$	0	$-$	0	$+$	

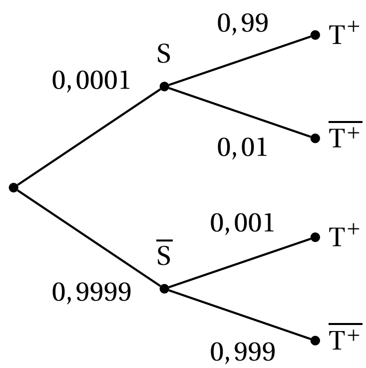
La valeur maximale de p pour laquelle ce trinôme est négatif ou nul est alors 16.
Conclusion :la probabilité que le candidat trouve le code sera supérieure à 0,6 pour un maximum de 16 mygales.

<u>Exercice</u> 4. ♠♠♠♠

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive.
On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité.
Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive ?
<u>Données</u> :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de $0,99$.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test positif avec une probabilité de $0,001$. (et oui on peut être contrôlé positif sans être séropositif.)

En notant les événements S :« être séropositif »et T^+ l'événement : « le test est positif »on obtient :



On cherche $p_{\mathrm{T}^+}(\mathrm{S})$ qui vaut :

$$p_{\mathrm{T}^+}(\mathrm{S})=\frac{p(\mathrm{S}\cap\mathrm{T}^+)}{p(\mathrm{T}^+)}=\frac{0,0001\times0,99}{0,0001\times0,99+0,9999\times0,001}\simeq 0,1$$