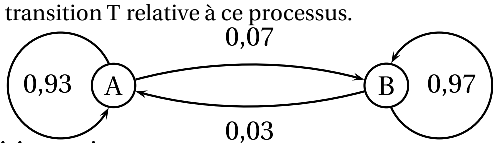
✿ Devoir Maison 11 ✿
Matrice - Etudier un processus évolutif aléatoire

<u>Exercice</u> 1. Dans une grande ville (dont on suppose que la population reste globalement constante), on cherche à étudier les mouvements de population entre la banlieue et le centre-ville. On considère pour cela que, si on choisit au hasard un habitant de la banlieue, il a une probabilité de $0,03$ de déménager en centre-ville l'année suivante ; de même si on choisit au hasard un habitant du centre-ville, il a une probabilité de $0,07$ de déménager en banlieue l'année suivante. On note A l'état « habiter en centre-ville »et B l'état « habiter en banlieue ». On identifiera l'ensemble des états $\{A;B\}$ à l'ensemble $\{1;2\}$. Soit X_n la variable aléatoire donnant l'état d'un habitant pris au hasard à l'année n. On suppose que la loi de probabilité de X_0 (ce qu'on l'on appelera la loi de probabilité initiale) est donnée par le vecteur-colonne $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (on a notamment $x_0 + y_0 = 1$)

1. Dessiner un graphe et écrire la matrice de transition T relative à ce processus.



On en déduit la matrice T de transition suivante :

$$\begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 \\ 0,07 & 0,97 \end{pmatrix}$$

2. On choisit $x_0 = 0,3$. Calculer les matrices-colonnes U_1 et U_2 associées aux lois de probabilités des variables aléatoires X_1 et X_2. Que constate-t-on ?

$$U_1 = T \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,03 \\ 0,07 & 0,97 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$U_1 = U_0$, par conséquent :

$$U_2 = T \times U_1 = T \times U_0 = U_0$$

On constate pour $x_0 = 0,3$ la proportion de personnes vivant en ville et en banlieue est constante au cours des années.

3. Dans cette question on choisit $x_0 = 0,2$. Grâce à une calculatrice, calculer les lois de probabilités U_3, U_5, U_{10} et U_{30} (arrondir les résultats au millième. Que peut-on dire de l'évolution de la répartition de la population entre centre ville et banlieue au cours des années ?

Montrons par récurrence que $U_n = T^n \times U_0$

– *Initialisation* : pour $n = 0$ on a $T^0 \times U_0 = U_0$
La propriété est vraie au rang 0.

– *Hérédité* : Montrons l'implication suivante :

$$U_n = T^n \times U_0 \Longrightarrow U_{n+1} = T^{n+1} U_0$$

On a :

$$U_{n+1} = T \times U_n = T \times T^n \times U_0 = T^{n+1} U_0$$

La propriété est héréditaire.

– *Conclusion* : Pour tout entier naturel n on a :

$$U_n = T^n U_0$$

Grâce à cette relation et au fait que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ on déduit :

$$U_3 \simeq \begin{pmatrix} 0,227 \\ 0,773 \end{pmatrix}$$

puis

$$U_5 \simeq \begin{pmatrix} 0,241 \\ 0,759 \end{pmatrix}$$

puis :

$$U_{10} \simeq \begin{pmatrix} 0,256 \\ 0,735 \end{pmatrix}$$

et enfin :

$$U_{30} \simeq \begin{pmatrix} 0,296 \\ 0,704 \end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$