Maths

Terminale Scientifique

CORRECTION TS2-TS3
OBLIGATOIRE

Sujet Bac Gris

Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Exercice 1. (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera sur la feuille de papier millimétré (fournie en fin d'exercice) une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1+2\mathrm{i} \quad ; \quad b = -2-\mathrm{i} \quad ; \quad c = -3+\mathrm{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $|a|$ et $|b|$, que peut-on en déduire pour le triangle OAB ?

$$|a| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad |b| = |-2-i| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

Comme $|a| = \mathrm{OA}$ et $|b| = \mathrm{OB}$ il suit que OA = OB et donc que le triangle OAB est isocèle.

3. Calculer AB.

$$\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |b-a| = |-2-i-(-1+2i)| = |-2-i+1-2i| = |-1-3i| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

4. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{b}{a}$, en déduire l'argument de $\dfrac{b}{a}$ et le module de $\dfrac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB. On a :

$$\frac{b}{a} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{2+4i+1-2}{(-1)^2-4i^2} = \frac{5i}{1+4} = \frac{5i}{5} = i$$

Ainsi $\left|\dfrac{b}{a}\right| = |i| = 1$ et $arg\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)\right) = arg(i) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Puisque $\left|\dfrac{b}{a}\right| = 1$ il vient que $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = 1 \iff \mathrm{OB} = \mathrm{OA}$ et puisque $arg\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ il suit que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Le triangle OAB est donc rectangle et isocèle en O.

5. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M$'$ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z+1-2\mathrm{i}}{z+2+\mathrm{i}}$$

(a) Calculer l'affixe c' du point C$'$, image de C par f et placer le point C$'$ sur la figure.

$$c' = \frac{c+1-2i}{c+2+i} = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{b}{a} = i$$

(b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment [AB].

$$|z'| = 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{z+1-2i}{z+2+i}\right| = 1 \Longleftrightarrow \frac{|z+1-2i|}{|z+2+i|} = \frac{z-(-1+2i)}{z-(-2-i)|} = 1 \Longleftrightarrow \frac{|z_{\mathrm{M}}-a|}{|}z_{\mathrm{M}}-b| = 1$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM}$$

M est donc un point de la médiatrice du segment [AB], l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché est donc comme annoncé la médiatrice du segment [AB].

(c) Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.
On sait d'après la première question que OA = OB donc O $\in \mathscr{E}$.
De plus $\mathrm{AC} = |c-a| = |-3+i-(-1+2i)| = |-2-i| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$ et $\mathrm{BC} = |b-c| = |-3+i-(-2-i)| = |-1+2i| = |a| = \sqrt{5}$ donc on a AC = BC ainsi C $\in \mathscr{E}$.

6. On considère les points J et K d'affixes respectives j et k définies par :

$$j = e^{-i\frac{\pi}{2}}a \qquad \text{et} \qquad k = e^{i\frac{\pi}{2}}c$$

On note L le milieu de [JK].

(a) Donner la forme algébrique des nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, en déduire la forme algébrique de j puis celle de k. Placer J et K.
$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0+i = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0-i = -i$
Par conséquent :

$$j = -ia = -i(-1+2i) = i-2i^2 = i+2 = 2+i \qquad \text{et} \qquad k = ic = i(-3+i) = -3i+i^2 = -3i-1 = -1-3i$$

(b) On note ℓ l'affixe du point L, d'éterminer ℓ.
$\ell = \dfrac{j+k}{2} = \dfrac{2+i-1-3i}{2} = \dfrac{1-2i}{2} = \dfrac{1}{2} - i.$

(c) Démontrer que la droite (OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.
On souhaite donc montrer que la droite (OL) est perpendiculaire au côté [AC]. On montre soit que $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ soit on montre que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2} [\pi]$.

- **Méthode 1 : Avec le produit scalaire** :

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-3+1; 1-2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AC}}(-2; -1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OL}}\left(\frac{1}{2}-0; -1-0\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OL}}\left(\frac{1}{2}; -1\right)$$

Par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -2 \times \dfrac{1}{2} + (-1) \times (-1) = -1+1 = 0$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OL}}$ ce qui prouve que la droite (OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.

– **Méthode 2 : En utilisant les arguments** :
On sait que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = arg\left(\frac{c-a}{\ell-0}\right)$$

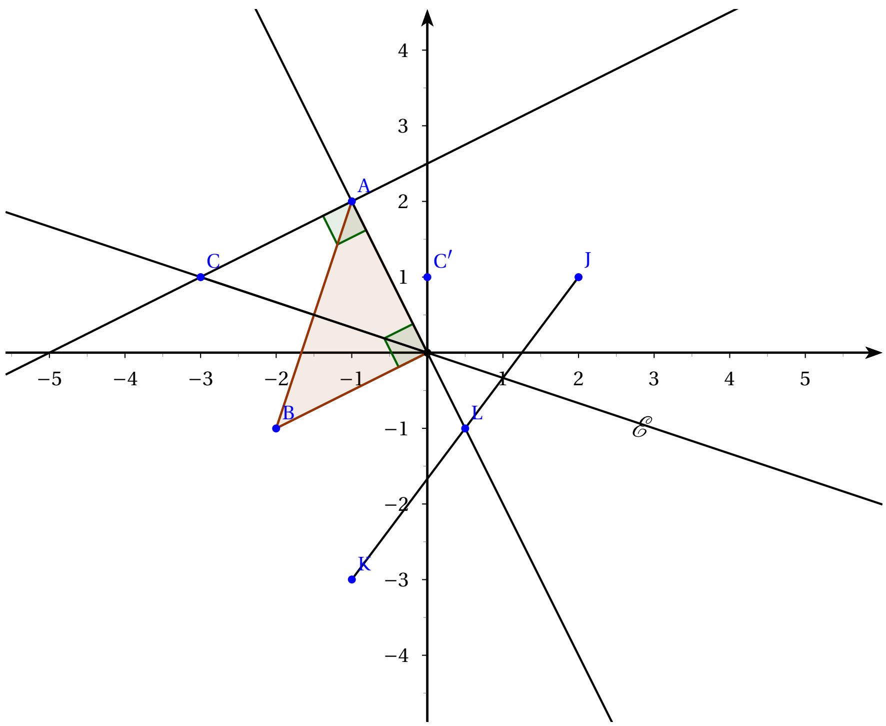
Or :

$$\frac{c-a}{\ell} = \frac{-3+i-(-1+2i)}{0,5-i} = \frac{-2-i}{0,5-i} = \frac{(-2-i)(0,5+i)}{(0,5-i)(0,5+i)} = \frac{-1-2i-0,5i+1}{0,25+1} = \frac{-2,5i}{1,25} = -2i$$

Or, l'argument d'un imaginaire pur vaut $\frac{\pi}{2}[\pi]$, par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

On en déduit que la droite (OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.



Exercice 2. (5 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N et K sont des entiers, U, V, W sont des réels
Début :	K := 0 et U := 2 et V := 10
	Saisir N
	Tant que K < N
	Affecter K + 1 à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U et V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0		2	10
1	2	$\frac{14}{3}$	8
2	$\frac{14}{3}$	$\frac{52}{9}$	$\frac{43}{6}$

PARTIE B.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{3u_n - 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12}$$

Au final on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$. En déduire que $v_n - u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n) = \frac{5}{12}w_n.$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$, par conséquent pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$$

Or, trivialement $8\left(\frac{5}{12}\right)^2 > 0$ donc $w_n > 0$ donc $v_n - u_n > 0$ et ce pour tout entier naturel n.

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$$

   Or on sait que $w_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante. De même pour tout entier naturel n on a :

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{w_n}{4} < 0$$

   Par conséquent $v_{n+1} < v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est strictement décroissante.

   (b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   On a montré que $v_n - u_n > 0 \iff v_n > u_n$, or (u_n) est strictement croissante donc pour tout entier naturel n $u_n \geq u_0 \iff u_n \geq 2$ donc $v_n > u_n \geq 2$, par conséquent $v_n > 2$. De même puisque (v_n) est strictement décroissante pour tout entier naturel n on a $v_n \leq v_0 = 10$ donc $10 \geq v_n > u_n$ et donc $u_n < 10$.

   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

   La suite (u_n) est croissante et majorée par 10, elle converge (d'après le théorème de convergence monotone) donc vers un réel $\ell \leq 10$, et la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers un réel $\ell' \geq 2$.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

   On sait que $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$, or $-1 < \frac{5}{12} < 1$ donc :

   $$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

   Or, $w_n = v_n - u_n$ donc :

   $$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell - \ell' \iff 0 = \ell - \ell' \iff \ell = \ell'$$

   Les suites (u_n) et (v_n) ont donc même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   Pour tout entier naturel n on a :

   $$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n = 3u_n + 4v_n = t_n$$

   ce qui prouve que la suite (t_n) est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

   $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 6 + 40 = 46$ donc pour tout entier n on a :

   $$t_n = 46 \iff 3u_n + 4v_n = 46$$

par passage à la limite (en notant ℓ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on obtient :

$$3\ell + 4\ell = 46 \iff 7\ell = 46 \iff \ell = \frac{46}{7}$$

Exercice 3. (6 points)

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

PARTIE A.

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Par produit on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De plus $f(x) = xe^x + e^x$, or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et par croissance comparé $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc par somme :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = (x+1)'e^x + (x+1)\left(e^x\right)' = e^x + (x+1)e^x = e^x(1+x+1) = e^x(x+2)$$

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

On vient de démontrer que $f'(x) = (x+2)e^x$, or :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad e^x > 0$$

donc $f'(x)$ est du signe de $x+2$ expression affine qui s'annule pour $x = -2$ d'où :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

PARTIE B.

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$. On a la suite d'équivalence :

$$\begin{aligned} & g_m(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x+1-me^{-x} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x+1 = me^{-x} \\ \Longleftrightarrow\ & (x+1)e^x = me^{-x}e^x \\ \Longleftrightarrow\ & f(x) = m \end{aligned}$$

(b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m. $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses si et seulement si $g_m(x) = 0$, et donc le nombre de solution de cette équation donne le nombre de point d'intersection de $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses.

Compte tenu du tableau de variation de f l'équation $f(x) = m$ admet :

- aucune solution si $m < -e^{-2}$.
- exactement une solution si $m = e^{-2}$.
- deux solutions si $-e^{-2} < m < 0$
- une solution si $m > 0$.

Il découle de la question précédente que $g_m(x) = 0$ admet :

- aucune solution si $m < -e^{-2}$.
- exactement une solution si $m = e^{-2}$.
- deux solutions si $-e^{-2} < m < 0$
- une solution si $m > 0$.

2. On a représenté, page suivante, les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et −e). Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
$g_0(x) = x+1$ donc g_0 est une fonction affine, sa courbe est donc une droite, il s'agit de la courbe 2.
$g_{-e}(x) = x+1+ee^{-x} = x+1+e^{1-x} \geq 0 \qquad \forall x \geq 0$
$\mathscr{C}_{-e}$ est donc la courbe 1. $\mathscr{C}_e$ est donc la courbe restante, la courbe 3.

3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.
Si $m = 0$ on vient juste de voir que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{D}$ sont confondus.
De plus $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$ si et seulement si

$$g_m(x) > x+1 \Longleftrightarrow x+1-me^{-x} > x+1 \Longleftrightarrow -me^{-x} > 0 \Longleftrightarrow -m > 0 \Longleftrightarrow m < 0$$

Enfin si $m > 0$ $\mathscr{C}_m$ est au dessous de $\mathscr{D}$.

4. (a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur la page suivante.

Il s'agit d'hachurer le domaine décrit ci-dessus...

(b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$. $\mathscr{C}_{-e}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_e$ est au dessous de $\mathscr{D}$, il en découle que $\mathscr{C}_{-e}$ est au dessus de $\mathscr{C}_e$, par conséquent :

L'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_{-e}$ et $\mathscr{C}_e$, puis entre l'axe des ordonnées et la droite **verticale** d'équation $x = a$ est :

$$\mathscr{A}(a) = \int_0^a g_{-e}(x) - g_e(x)\,dx = \int_0^a ex+1+e^{-x} - (x+1-e^{1-x})\,dx = \int_0^a 2e^{1-x}\,dx$$

Une primitive de $h(x) = 2e^{1-x}$ est $\mathrm{H}(x) = -2e^{1-x}$ par conséquent d'après la formule de Newton-Leibniz on a :

$$\mathscr{A}(a) = \int_0^a h(x)\,dx = [\mathrm{H}(x)]_0^a = \mathrm{H}(a) - \mathrm{H}(0) = -2e^{1-a} + 2e^{1-0} = 2e - 2e^{1-a}$$

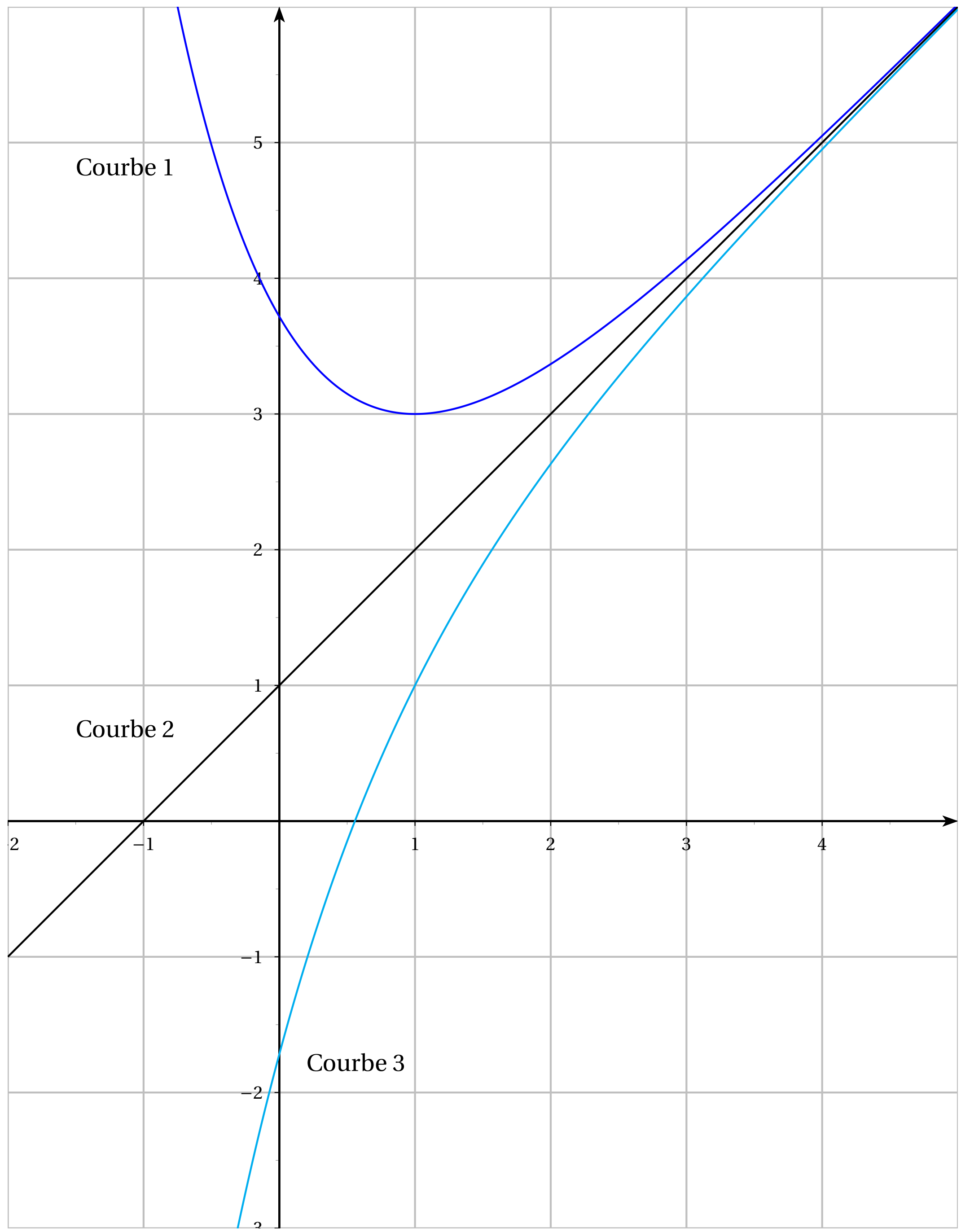
En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Lorsque a tend vers $+\infty$ alors $1-a$ tend vers $-\infty$ et donc :

$$\lim_{a\to+\infty} e^{1-a} = 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{a\to+\infty} \mathscr{A}(a) = 2e$$


Courbe 1
Courbe 2
Courbe 3
5
4
3
2
1
−1
−2
2
−1
1
2
3
4

Exercice 4. (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

1. On dispose de trois urnes contenant chacune un certain nombre de boules colorées, comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

	Boules Bleues	Boules Rouges
Urne 1	1	3
Urne 2	3	2
Urne 3	4	2

On tire au hasard une urne, puis une boule de cette urne.

La boule tirée est bleue, mais quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

En notant B l'événement la boule tirée est bleue et U_1 l'événement la boule provient de l'urne 1, on a :

$$p_B(U_1) = \frac{p(B\cap U_1)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15+36+40}{60}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{91}{60}} = \frac{60}{4\times 91} = \frac{15}{91}$$

2. Le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca[1] est un ancien boxeur, aveugle et parkinsonien. Il arrache les dents de ses patients au hasard. Les syldaves venant le consulter ont toujours une seule dent de malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent encore avant l'intervention des tenailles ou des poings, c'est selon. Le dentiste arrache toujours exactement une dent par patient (malade ou saine suivant la chance du patient). On note X le nombre de dents malades extraites à bon escient après avoir traité n patients par le dentiste.

Combien doit-il traiter de personnes au minimum pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à $0,6$?

X suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{32}$ (on répète de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli n fois pour laquelle la probabilité de succès vaut $\frac{1}{32}$), par conséquent :

$$p(X\geq 1) = 1 - p(X=0) = 1-\left(\frac{31}{32}\right)^n$$

Enfin :

$$1-\left(\frac{31}{32}\right)^n \geq 0,6 \iff -\left(\frac{31}{32}\right)^n \geq -0,4 \iff \left(\frac{31}{32}\right)^n \leq 0,4 \iff \ln\left(\frac{31}{32}\right)^n \leq \ln 0,4 \iff n\ln\frac{31}{32} \leq \ln 0,4$$

et donc, du fait que $\ln\frac{31}{32} < 0$ on a :

$$n \geq \frac{\ln 0,4}{\ln\frac{31}{32}} \simeq 28.8 \Longrightarrow n\geq 29$$

Ce cher dentiste doit traiter un minimum de 29 patients pour avoir plus de 60% de chance d'arracher au moins une dent malade.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1~;~2~;~3)$, $B(-1~;~5~;~4)$ et $C(-1~;~0~;~4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

1. La capitale de la Syldavie.

$\overrightarrow{AB}\,(-2;3;1)$,

$$M(x;y;z) \in (AB) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{CM} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+1=-2t \\ y=3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z-4=t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-2t-1 \\ y=3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z=t+4 \end{cases}$$

réponse qui figure dans l'énoncé, donc c'est bon.

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point D$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-3\,;\,-5\,;\,1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=t-7 \\ y=t+3 \\ z=2t+5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{d}\,(1;1;2)$ et :

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = -3-5+2 \neq 0$$

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal à donc le plan $\mathscr{P}$ n'est pas parallèle à la droite $\mathscr{D}$, donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants. (réponse qui est présente donc inutile d'analyser les autres).