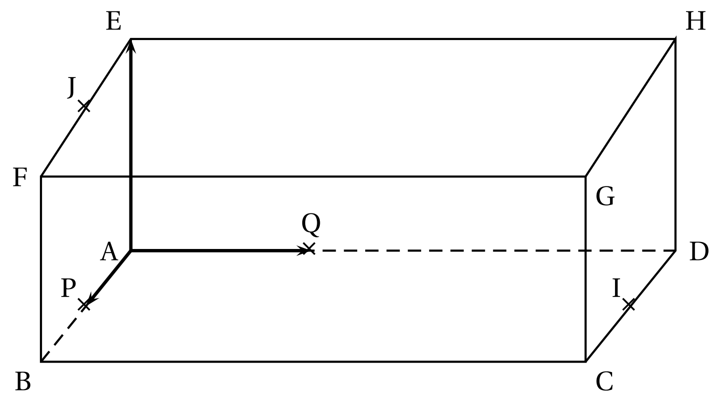
I. Nouvelle Calédonie 2014

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AP},\,\overrightarrow{AQ},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].
3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
   Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].
4. (a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
   (b) Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t \\ z & = & 3t-4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

   (c) Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.
   (d) Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

II. Liban 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(1 ; −1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(−3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3).
On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+1 \\ y & = & 2t-1 \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k+1 \\ y & = & k+3 \\ z & = & -k+4 \end{array}\right. , k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :
Proposition **a.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
Proposition **b.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.
Proposition **c.** Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition **d.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :
Proposition **a.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition **b.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition **c.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition **d.** Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Question 3 :
Proposition **a.** Les points A, D et C sont alignés.
Proposition **b.** Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition **c.** Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition **d.** Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :
On note $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :
Proposition **a.** $\vec{n}\,(-1\,;\,5\,;\,4)$
Proposition **b.** $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$
Proposition **c.** $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,3)$
Proposition **d.** $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$

III. Pondichery 2013

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t+2t' \\ y &=& -t-2t' \\ z &=& -1-t+3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t \\ y &=& -t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace M$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et N$(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+2t' \\ y &=& 1-t+t' \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+t' \\ y &=& 1-t-2t' \\ z &=& 1-t-3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t+t' \\ y &=& 1-2t+2t' \\ z &=& -1-t' \end{array}\right.$

2. (a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A$(-8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   (b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   (c) La droite (D) est une droite du plan (P).
   (d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. (a) La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   (b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   (c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   (d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. (a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   (b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& -2-t \\ z &=& -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   (c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   (d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

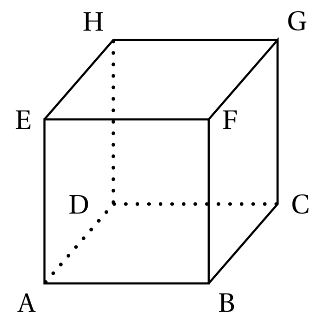
IV. Métropole 2013

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ est une droite.
2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.
3. Soit ABCDEFGH un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$. On note S le point de coordonnées $(1\,,-2\,,-2)$.

   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+3t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

V. Polynésie 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   a. $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
   (a) une solution
   (b) deux solutions
   (c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
   (d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points A(1 ; 2 ; 3), B(−1 ; 5 ; 4) et C(−1 ; 0 ; 4). La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point D(−1 ; 2 ; 3) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3\,;\,-5\,;\,1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

   (a) La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

   (b) La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

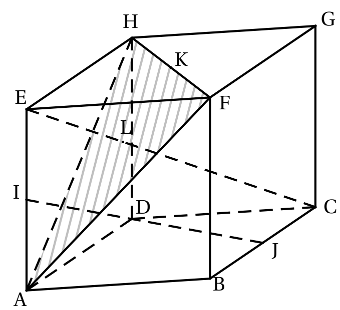
   (c) La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   (d) La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

VI. Antilles-Guyanne 2013

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE],
le point J est le milieu du segment [BC],
le point K est le milieu du segment [HF],
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. (a) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   (b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   (c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   (d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. (a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   (b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à (−1).
   (c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   (d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

3. Dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$:
   (a) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
   (b) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
   (c) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
   (d) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.
4. (a) $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   (b) $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   (c) $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   (d) $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
5. (a) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   (b) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   (c) $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   (d) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

VII. Amérique Du Nord 2013

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2 ; -1 ; 3)$.
   (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   (a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   (b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

VIII. Asie 2013

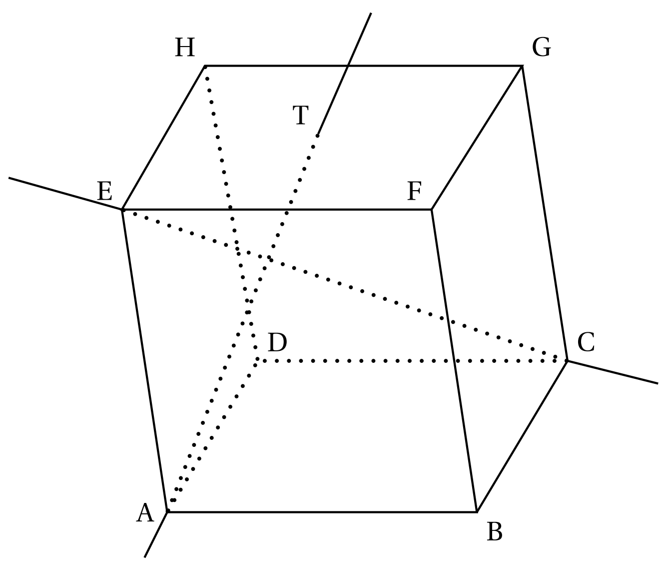
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\mathrm{i},\quad b = -\sqrt{3}+\mathrm{i},\quad c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad \text{et}\quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

   Affirmation 3 : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 6-2t \\ z = -2+t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

IX. Centre Etranger 2013

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A $(12\,;\,0\,;\,0)$, B $(0\,;\,-15\,;\,0)$, C $(0\,;\,0\,;\,20)$, D $(2\,;\,7\,;\,-6)$, E $(7\,;\,3\,;\,-3)$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x+y-2z-5=0$

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x+y+2z-24=0$$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 9-3t \\ y &=& 0 \\ z &=& 5+5t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.
Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

X. Antilles Guyanne Septembre 2013

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\,;\,-1\,;\,1),\quad B(4\,;\,-3\,;\,0) \text{ et } C(-1\,;\,-2\,;\,-1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 3t-1 \\ z &=& -2t+8 \end{array}\right.$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.

4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (11 ; −1 ; 4).
   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.

XI. Métropole Septembre 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

li est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

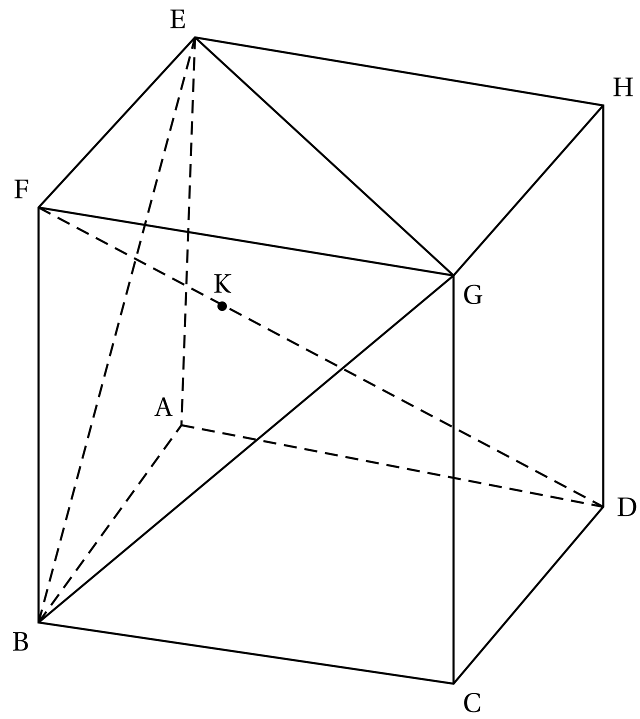
Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

, La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 1+3t \\ z = 4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.
   (a) La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   (b) La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
   (c) La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
2. On note $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.
   (a) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
   (b) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.
   (c) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$.
   (a) $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses.
   (b) $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.
   (c) $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   (a) Le triangle OBC est isocèle en O.
   (b) Les points O, B, C sont alignés.
   (c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.



XII. Amérique du sud Novembre 2013

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\,,\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $\text{K}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.
5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.