∾ EXERCICES ∾
MÉLANGEONS LES FONCTIONS ET LA TRIGO !

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{\sin x}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{x}{\cos x}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+\sin x}{x\sin x}$

Exercice 2 : Calculer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(x)+x}{x} \qquad g : x \longmapsto \frac{x^2+2\sin(x)}{3x} \qquad h : x \longmapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

Exercice 3 :

1. En utilisant la définition du nombre dérivé , rappeler les limites suivantes $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$
2. En utilisant le changement de variable $h = x - \dfrac{\pi}{2}$, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4 : En utilisant des changements de variables, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{3x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{5x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

Exercice 5 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto x^2\cos(x)$ $\quad g : x \longmapsto (x^3+2x^2+1)\sin(x)$ $\quad h : x \longmapsto \sqrt{x}\sin(3x+2)$ $\quad k : x \longmapsto \sqrt{3x+1}\cos(4x-7)$

Exercice 6 : Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer l'expression de sa fonction dérivée.

$$f : x \longmapsto \left(\sin(x)+\frac{3}{4}x-1\right)^4 \qquad f : x \longmapsto \frac{1}{(1+2x)^2} \qquad f : x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{2}-1} \qquad f : x \longmapsto \cos\left(2\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 7 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$
La courbe représentative de f coupe l'axe des ordonnées en $\mathrm{A}(0;1)$.
La tangente à cette courbe en A a pour équation $y = -x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Calculer a et b.

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

1. Montrer que f est périodique de période π.
2. f est-elle paire ? impaire ?
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifier.
2. la fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f. Vérifier graphiquement.

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cos(x)$.
Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse sur le sujet, et **justifier** sur votre copie.

1. La dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=$

   a. $\sin(x)$ **b.** $\cos(x)$ **c.** $\cos(x)+x\sin(x)$ **d.** $\cos(x)-x\sin(x)$

2. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[-2\pi;2\pi]$ est :

   a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

3. $f'\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=$

   a. $\dfrac{5\pi}{12}$ **b.** $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{12}$ **c.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ **d.** Autre valeur

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^2$

   a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** n'existe pas **d.** Autre réponse

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   a. $=0$ **b.** $=+\infty$ **c.** n'existe pas **d.** Autre réponse

6. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à :

   a. l'origine **b.** l'axe des ordonnées **c.** l'axe des abscisses **d.** la droite d'équation $y=x$

7. La fonction f est :

   a. paire **b.** impaire **c.** 2π- périodique **d.** Autre réponse

Exercice 11 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on a $f'(x)=\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$
3. **a.** Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en conclure ?
   b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4. A l'aide du cercle trigonométrique, étudier le signe de $1+2\cos x$ sur $[0;\pi]$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;0]$ et enfin sur $[-3\pi;3\pi]$.