Exercice 1 : Soit ABCD un tétraèdre. Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC] et [BD].
Démontrer que (IJK)//(ACD).

Exercice 2 : SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze.
Démontrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

Exercice 3 : On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un parallélogramme.
Les points I et J sont définis par

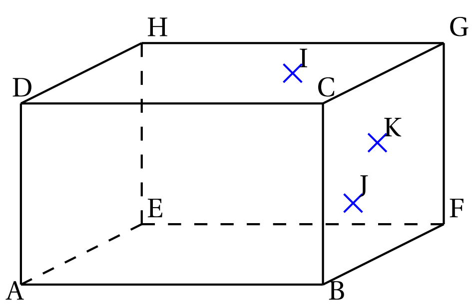
$$\overrightarrow{SI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{SB}$$

Enfin K est le milieu du segment [DC].
But : Construire la section du solide par le plan (IJK).

1. Représenter la situation en perspective cavalière.
2. Déterminer la position du point L d'intersection entre la droite (IJ) et le plan (ABC).
3. Représenter en rouge la section du plan (IJK) sur les faces SAB et ABCD.
4. On note H le point d'intersection entre le plan (IJK) et la droite (AD). Déterminer la position de H.
5. En déduire la section de la face SAD par le plan (IJK).
6. Terminer la construction de cette section.

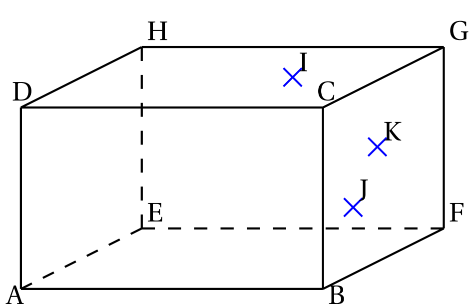
Exercice 4 : On considère un cube ABCDEFGH, I est le milieu de [AB], J celui de [BC] et K celui de [HG].
Déterminer la section de ce cube par le plan (IJK).

Exercice 5 :



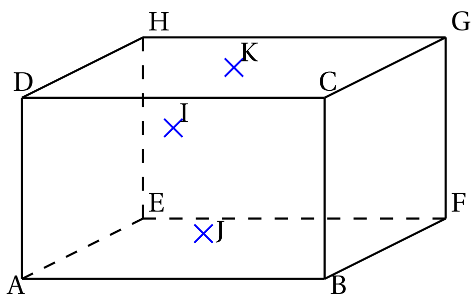
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 6 :



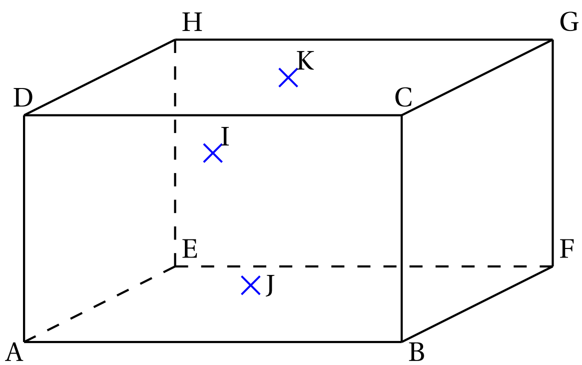
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 7 :



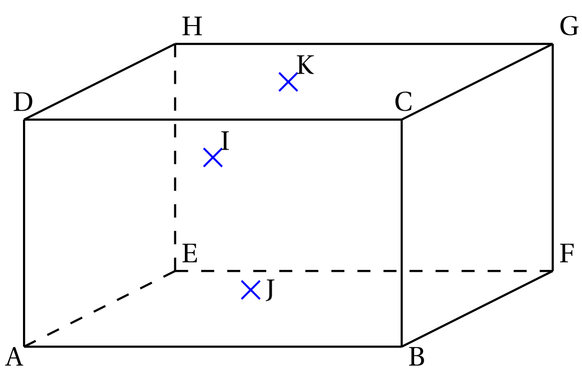
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (DCG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 8 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (EFG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

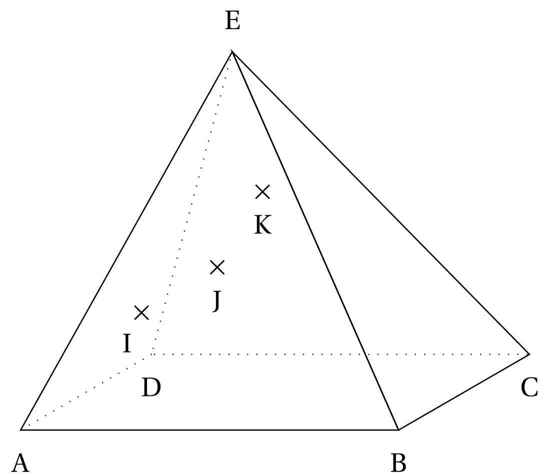
Exercice 9 : **(Pour les experts)**



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et J ∈ (ABF), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 10 :

On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).



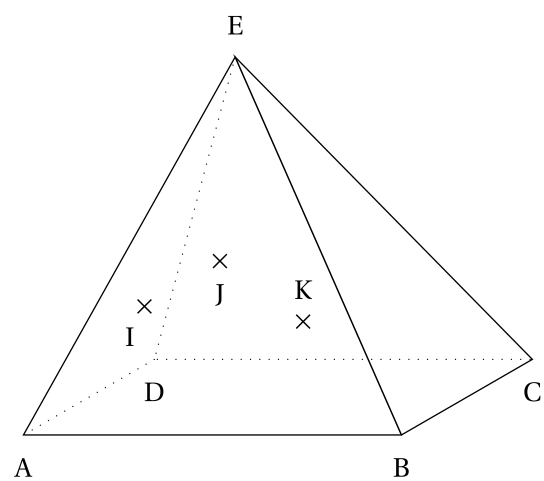
1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2. **a.** Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
   La tracer.

   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.

   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.

Exercice 11 : **(Pour les experts)**

On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).



1. **a.** Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE). La tracer.

   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.

   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$. La tracer
2. **a.** Placer $M = (IJ) \cap (ABC)$.

   b. En déduire $(IJK) \cap (ABC)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.

Exercice 12 : Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes [AD] et [AB]. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG) à l'aide du logiciel géogébra.

Exercice 13 : Démontrons par l'absurde le théorème du toit vu en seconde et rappeler cette année. On rappelle que l'on considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon une droite Δ. De plus, on sait qu'une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathscr{P}'$. Pour raisonner par l'absurde, on suppose de plus que Δ n'est pas parallèle à d et d'.
On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

1. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
2. Expliquer pourquoi il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul directeur de d et d'.
3. Expliquer pourquoi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
4. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
5. En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 14 : ABCD est un tétraèdre.
Le point I est le milieu de [CD] et le point K est défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1. Faire une figure et placer K.
2. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. En déduire que les points B, K et I sont alignés.

Exercice 15 : ABCDEFGH est un cube. M et L sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$
2. En déduire la position de la droite (ML) par rapport au plan (DBH)

Exercice 16 : ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [CD] et [EF].

1. Démontrer que la droite (CK) est parallèle au plan (IJH)
2. Démontrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

Exercice 17 : SABCD est une pyramide à base carré ABCD. Le point O est le centre de ABCD.
J est le milieu de [SO]. Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

1. Justifier que S, B, D, O, J et K sont coplanaires.
2. a. Démontrer que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$
   b. Justifier que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)$ et en déduire que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$
   c. Montrer que B, J et K sont alignés.
3. Positions relatives de plans
   a. Etudier la position relative du plan (BJC) avec le plan (ABC) et avec le plan (SCD).
   b. Etudier la position relative des plans (BJC) et (SAD).
   c. Construire la section de la pyramide SABCD par le plan (BJC). Ne pas justifier.

Exercice 18 : Dans un repère de l'espace, on considère les points $E(2;-3;5)$, $F(0;-1;1)$, $H(1;-8;8)$ et la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = -2+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

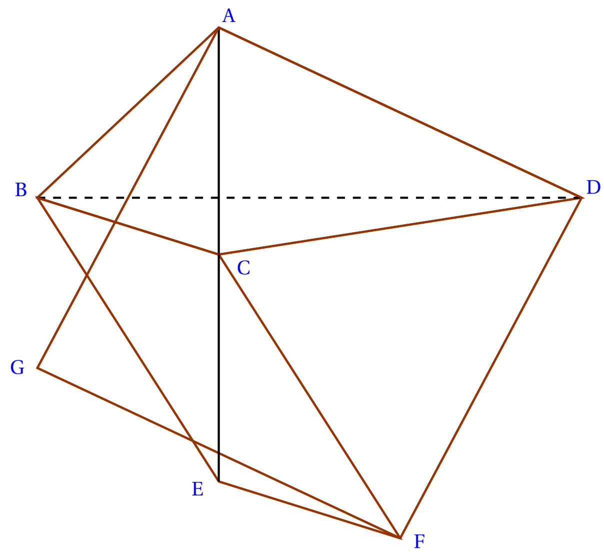
1. Montrer que d et (EF) sont strictement parallèles.
2. Montrer que d et (EH) sont sécantes et préciser leur point d'intersection K.

Exercice 19 : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(1;2;-1)$ et $B(2;4;-4)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. a. Démontrer que la droite (AB) et l'axe $(O, \vec{k})$ sont sécants. Préciser les coordonnées du point commun K.
   b. Déterminer des représentations paramétriques du segment [AB] et de la demi-droite [BK).

Exercice 20 : ABCD est un tétraèdre.
E est le symétrique de A par rapport à C,
F est le point tel que BCFE est un parallélogramme,
G est le point tel que ADFG est un parallélogramme.
On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Pourquoi $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right)$ est-il un repère de l'espace ?
2. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Déterminer les coordonnées des points E, F et G.
   Justifier un minimum.
4. Démontrer que B, G, C et D sont coplanaires.
5. En déduire la position relative de G et du plan (BCD).



Exercice 21 : Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(-1;3;5)$, $B(2;-3;-1)$ et $C(5;-1;-6)$

1. **Représentation paramétrique de plan**
   a. A, B et C définissent-ils un plan ?
   b. Si oui, en donner une représentation paramétrique.
2. **Représentation paramétrique de droite**
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
   b. Déterminer une représentation paramétrique du segment [AB].
3. **Equation cartésienne de Sphère** (ensemble des points situés à égale distance d'un point donné)
   Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre B et de rayon 10.
4. **Appartenance d'un point à une droite, une sphère ou un plan**
   On note $E(8;-3;-9)$ et $F(-4;9;11)$
   a. Vérifier que $E \in \mathscr{S}$.
   b. A-t-on $F \in (ABC)$? $F \in [AB]$? $F \in \mathscr{S}$?
5. **Interprétation d'une représentation paramétrique de droite.**
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par E et parallèle à (BC).
   b. Δ est une droite qui admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t-1 \\ y = -2t+3 \\ z = 3t-12 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
   Donner un vecteur directeur de Δ et un point de Δ.
6. **Intersection droite/droite, droite/plan, droite/sphère.**
   a. Déterminer l'intersection entre Δ et (BC).
   b. Déterminer l'intersection entre d et $\mathscr{S}$.
   c. Déterminer l'intersection entre d et (ABC).
   d. Déterminer l'intersection entre Δ et (ABC).

Exercice 22 : On considère un tétraèdre ABCD.
On note E le milieu du segment [AC] et G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Construire le point K défini par $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AK}$
2. Expliquer pourquoi $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace.
   Dans la suite de l'exercice, on se place dans ce repère.
3. Démontrer que les points E, G et K sont alignés.
4. Le point $F\left(\frac{3}{2};0;0\right)$ appartient-il à la droite (GE) ?
5. La parallèle Δ à la droite (EG) passant par A passe-t-elle par le symétrique de C par rapport à G ?

Exercice 23 : Soient les droites (d_1) et (d_2) de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=3+4t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \begin{cases} x=3-u \\ y=-4+2u \\ z=9-u \end{cases},\ u\in\mathbb{R}$$

1. Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont soit sécantes ou soit non coplanaires.
2. Norbert a effectué la recherche suivant à l'aide du logiciel Xcas :

```
1 resoudre([-1+2t=3-u,1-t=-4+2u,3+4t=9-u],[t,u])
                                          [1, 2 ]
```

   a. En admettant le résultat obtenu, peut-on affirmer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes ?
   Si oui, pourquoi et en quel point ?

   b. Démontrer le résultat obtenu par le logiciel.

Exercice 24 : Soient les droites (d_1) et (d_2) de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=3+4t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \begin{cases} x=3-u \\ y=-4+2u \\ z=8-u \end{cases},\ u\in\mathbb{R}$$

Norbert a effectué la recherche suivant à l'aide du logiciel Xcas :

```
2 resoudre([-1+2t=3-u,1-t=-4+2u,3+4t=8-u],[t,u])
                                              []
```

1. En admettant le résultat obtenu, peut-on affirmer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires ? Pourquoi ?
2. Démontrer le résultat obtenu par le logiciel et déterminer la position relative des droites (d_1) et (d_2).

Exercice 25 : Soient les droites (d_1) et (d_2) de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-4t \\ z=3-2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \begin{cases} x=3-u \\ y=-4+2u \\ z=9+u \end{cases},\ u\in\mathbb{R}$$

Norbert a effectué la recherche suivant à l'aide du logiciel Xcas :

```
3 resoudre([-1+2t=3-u,1-4t=-4+2u,3-2t=9+u],[t,u])
                                              []
```

1. En admettant le résultat obtenu, que peut-on affirmer sur la position relatives des droites (d_1) et (d_2) ? Pourquoi ?
2. Démontrer le résultat obtenu par le logiciel et déterminer la position relative des droites (d_1) et (d_2).

Exercice 26 : Que pouvez-vous déduire des trois exercices précédents ?