∽ Exercices ∾
La suite des Suites !

Exercice 1 : On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1+3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 2 : La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Su $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.
   Illustrer graphiquement les trois derniers résultats.

Exercice 4 :

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
   (A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 6 :

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. On note S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls.
   - **a.** Calculer S_1, S_2 et S_3.
   - **b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\mathrm{S}_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ (a)
   - **c.** Quel est l'entier n pour lequel $\mathrm{S}_n = 3\,025$?
3. On note P_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels **pairs** non nuls.
   - **a.** Calculer P_1, P_2 et P_3.
   - **b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\mathrm{P}_n = 2n^2(n+1)^2$
   - **c.** Quel est l'entier n pour lequel $\mathrm{P}_n = 1\,800$?
4. On note I_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels **impairs** non nuls.
   - **a.** Calculer I_1, I_2 et I_3.
   - **b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\mathrm{I}_n = n^2(2n^2 - 1)$
   - **c.** Quel est l'entier n pour lequel $\mathrm{I}_n = 41\,328$?

(a). On utilisera la formule démontrée dans le cours sur la somme des n premiers entiers.

Exercice 7 : Montrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Exercice 8 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 9 : Pour tout entier $n \geq 1$, on note la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.
On rappelle la proposition suivante, énoncée en 1S, mais non démontrée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{on a} \quad f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$$

1. Démontrer que pour $n = 1$ la proposition est vraie.
2. Vérifier que les formules de 1S pour $n = 2$ et $n = 3$ correspondent à la formule générale énoncée ci-dessus.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exercice 10 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'**inégalité de Bernoulli** est vraie :

$$\forall x > 0 \text{ , on a } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 11 :

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
2. Compléter la propriété suivante, vu en première :
   Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$
3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
4. Démontrer que pour tous réels a et b on a $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

   formule appelée **formule du binôme de Newton**.
7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

Exercice 12 : Soit e un réel strictement positif.

1. Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'inéquation $\dfrac{3}{2x+1} < e$
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3}{2n+1}$
   a. Démontrer que $u_n < e$ à partir d'un certain rang N.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 13 : Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - n$.

1. Résoudre les inéquations suivantes : $\quad v_n > 10^5 \quad$ et $\quad v_n > 10^{10}$
2. Conjecturer la limite de la suite (v_n) puis la démontrer.

Exercice 14 : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement à l'infini de la suite (u_n).
2. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 15 : On considère deux suites u et v.

1. Déterminer la limite éventuelle des suites u, v et $u+v$ dans les cas suivants :

   a. $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n$

   b. $u_n = n+1$ et $v_n = -n^2 - n$

   c. $u_n = n+1$ et $v_n = -n+2$

   d. $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$

2. Proposer des termes généraux u_n et v_n tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ tels que

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$

   b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 0$

   c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$

   d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 4$

Exercice 16 : On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \qquad \text{et} \qquad v_n = -(n+1)^2$$

1. **a.** Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

   b. On considère l'algorithme ci-contre. Quel est son intérêt ?

   c. A partir de quel rang N la distance entre u_n et ℓ est-elle strictement inférieure à 0,001 ?

2. **a.** Déterminer la limite de la suite v.

   b. Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n < -10^{10}$.

Algorithme 1 :

Variable(s) :
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
Début
  $n := 0$ et $u := \dfrac{1}{3}$.
  Tant que $(|u-2| \geq 0,001)$ **Faire**
    $n := n+1$ et $u := \dfrac{2n+1}{n+3}$
  Fin Tant que
  Renvoyer n
Fin

Exercice 17 : On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{5}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = n^2 - n$$

1. **a.** Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

   b. Compléter l'algorithme suivant de manière à ce qu'il affiche le plus petit entier naturel n tel que la distance entre u_n et ℓ soit inférieure à 10^{-5}.

2. **a.** Déterminer la limite de la suite v.

   b. Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 10^{10}$.

Algorithme 2 :

Variable(s) :
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
Début
  $n := 0$ et $u := \ldots$.
  Tant que (...............) **Faire**
    .... et ....
  Fin Tant que
  Renvoyer ...
Fin

Algorithme 3 :

Entrée(s) :
e est un nombre réel
Variable(s) :
n est un nombre entier
Début
$n \leftarrow 0$
Tant que $\left(\left|\dfrac{n+1}{2n^3+1}\right| \leq e\right)$ **Faire**
$n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
Renvoyer n.
Fin

Exercice 18 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n^3+1}$$

1. Etudier les variations de la suite (u_n).
2. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
3. On donne l'algorithme ci-contre.
   a. Que fait-il ?
   b. Programmer cet algorithme sur le logiciel de votre choix et déterminer les rangs N associés à $e = 10^{-2}$ puis $e = 10^{-5}$.

Exercice 19 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$.
2. Montrer que $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$
3. Montrer que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$
4. En déduire que (u_n) est majorée.

Exercice 20 : On considère la suite définie par $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Dresser le tableau de variation de f
3. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 21 : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$ Montrer, par récurrence, que cette suite est bornée.

Exercice 22 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0.5x^2 + x + 0.5$.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -0.5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
3. a. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
   b. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
4. Pour tout réel $e > 0$, on souhaite déterminer le rang N à partir duquel la distance entre u_n et ℓ est inférieure à e.
   a. Construire un algorithme permettant de résoudre ce problème.
   b. Programmer, puis déterminer le premier rang N associé à $e = 10^{-5}$ puis à $e = 10^{-10}$