**EXERCICES**
**LES MATHS : L'INTÉGRALE !**

# I ) Intégration sans primitives

**Exercice 1** : On donne $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

1. Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

**Exercice 2** : Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[0;1]$ telle que, pour tout $x \in [0;1]$, il existe deux réels $m$ et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

**Exercice 3** : Etudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$

Vous pourrez commencer par encadrer $e^{-x}$ sur $[n; n+1]$ en fonction de $n$.

**Exercice 4** : On pose $\quad \mathrm{I}_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Prouver que $\quad 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$

# II ) Primitives et intégration

**Exercice 5** : Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.
Calculer $\mathrm{F}'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?

**Exercice 6** : Calculer une primitive de $f_i$ sur $]0;1[$ dans les cas suivants :

$$f_1(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} \qquad f_2(x) = \tan x \qquad f_3(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

*C. Aupérin*
c.auperin@wicky-math.fr.nf

**Exercice 7** : Etudier si F est une primitive de $f$ sur I :

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $F(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $F(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $I = ]0;+\infty[$.
3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $F(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $I = ]2;+\infty[$.

**Exercice 8** : Si vous reconnaissez une forme du style $u'u^n$, alors une primitive sera $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$

En déduire une primitive de $f$ avec $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$ sur $]1;+\infty[$.

**Exercice 9** : $f$ est la fonction définie sur $I[-1;8]$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$

1. Démontrer que pour tout $x \in I$ on a $f(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+2)^2}$
2. a. En déduire une primitive G de $f$ sur I.
   b. Calculer la primitive F de $f$ telle que $F(0) = 2$.

**Exercice 10** :

1. $f$ est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$.
   Déterminer une primitive F de $f$ sur $]2;+\infty[$.
2. G est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$.
   Calculer la fonction dérivée de G.
3. Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ? Vérifier ce résultat en calculant $F(x) - G(x)$.

**Exercice 11** : Déterminer une primitive sur les intervalles I considérés de :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ avec $I = ]-1;1[$
2. $h : x \longmapsto \dfrac{e^x+3}{(e^x+3x)^3}$ avec $I = ]-\infty;0]$
3. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2}$ avec $I = \left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$
5. $j : x \longmapsto e^{3x+2}$ avec $I = \mathbb{R}$
6. $l : x \longmapsto (2x+1)e^{x^2+x+7}$ avec $I = \mathbb{R}$
7. $m : x \longmapsto \sin(3x) + 3\cos(2x)$ avec $I = \mathbb{R}$

**Exercice 12** : On rappelle que $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 13** : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx \qquad \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln t}{t}dt \qquad \int_2^4 \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

# III ) Extension aux fonctions de signe quelconque

**Exercice 14** :

1. **Vrai ou faux ?** L'intégrale d'une fonction continue et impaire est nulle.
2. **Vrai ou faux ?** Si $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$, alors $f$ est impaire.
3. Trouvez une fonction paire, non identiquement nulle sur $[-2,2]$, telle que $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$.
4. **Vrai ou faux ?** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$.
5. Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = +\infty$
6. Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 32$
7. **Vrai ou faux ?**Soit $u$ un réel strictement positif, alors $\int_{0}^{u} \mathrm{E}(x)\,dx \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la *partie entière* de $x$.
8. Trouvez une fonction telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right| dt$
9. Trouvez une fonction $f$ telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| < \int_{a}^{b} \left|f(t)\right| dt$
10. Trouvez une *condition nécessaire et suffisante* sur $f$ pour que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right| dt$
11. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} xt^2\,dx$
12. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} x^2 t\,dx$
13. Trouvez deux fonctions $f$ et $g$ continues sur $[1,2]$, distinctes, telles que $\int_{1}^{2} f(t)\,dt = \int_{1}^{2} g(u)\,du$
14. **Vrai ou faux ?** Si $f$ est bornée sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)\,du$ l'est aussi.
15. **Vrai ou faux ?** Si $f$ est croissante sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)\,du$ l'est aussi.
16. Déterminez une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et dont la valeur moyenne sur $[-2 ; 2]$ est 0.

**Exercice 15** : Démontrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,dt = 2$$

(a)

(a). On utilisera la relation de Chasles afin de supprimer les valeurs absolues.

**Exercice 16** : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[e;e^2]$ par

$$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$$

**Exercice 17** : La capacité pulmonaire de l'être humain suivant son âge $x$ de 10 à 90 ans, s'exprime, en litres, au moyen de la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{110(\ln x-2)}{x}$
Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans, à $0,1$ litre près par défaut.

**Exercice 18** : On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

1. **a.** Montrer que $u_0+u_1=1$.
   **b.** Calculer $u_1$ puis montrer que $u_1=\ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+1$.
   **c.** En déduire $u_0$.
2. **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ on a

$$u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$$

   **b.** En déduire les valeurs de $u_2$ et $u_3$.
3. On souhaite calculer $u_n$ pour $n\geq 2$.
   On propose l'algorithme ci-contre.
   Expliquer pourquoi celui-ci est incorrect, puis le corriger de façon à résoudre le problème.

**Algorithme 1 :**

**Entrée(s) :**
$n$ un entier naturel
**Variable(s) :**
$u$ est un nombre réel.
$k$ est un entier naturel.
**Début**
  $u \longleftarrow \ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+1$
  **Pour** $k$ allant de 2 à $n$ **Faire**
    $u \longleftarrow \dfrac{1-e^{-k}}{k}$
  **Fin Pour**
  Renvoyer $u$
**Fin**

4. On utilise le tableur pour calculer les premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | n | u(n) |
| 2 | 0 | =LN((EXP(1)+1)/2) |
| 3 | 1 | =LN(2/(EXP(1)+1))+1 |
| 4 | 2 | |

   **a.** Parmi les formules suivantes, laquelle faut-il enter en B4 de façon à obtenir $u_2$ ?
   =(1-EXP(-A4))/A4-B3    =(1-EXP(-A3))/A4-B3    =(1-EXP(-A3))/A3-B3
   **b.** On a recopié la formule vers le bas et calculé les 100 premiers termes de la suite $(u_n)$.
   On donne la fin du tableau des résultats à $10^{-5}$ près.

| $n$ | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(n)$ | 0.00541 | 0.00535 | 0.00529 | 0.00524 | 0.00518 | 0.00513 | 0.00508 | 0.00502 |

   Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(u_n)$ à l'infini ?
5. **a.** En utilisant la question 2a), montrer que pour tout $n\geq 1$ on a $0\leq u_n\leq\dfrac{1-e^{-n}}{n}$
   **b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
   **c.** Rémi affirme que pour tout entier $n\geq 100$, on a : $u_n\leq 0.1$.
   A-t-il raison ?