Exercices
Logarithme népérien pour attendre !

Exercice 1 : Simplifier l'expression suivante :

$$\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\cdots+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$$

Proposer une autre méthode de simplification pour retrouver le résultat précédent.

Exercice 2 : Démontrer que les fonctions suivantes sont impaires :

1. f est définie sur $]-3;3[$ par
$$f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$$
2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}$$

Exercice 3 : *Datation au carbone* 14

Les archéologues et les paléontologues datent les objets découverts contenant du carbone (restes d'êtres vivants : os, fossiles, ...) en mesurant la proportion de l'un de ses isotopes, le carbone 14, encore présent dans l'objet.

En effet, à la mort d'un être vivant, le carbone 14 présent dans son organisme se désintègre au fil des années, de sorte que, si p est la proportion de C_{14} restante au bout de N années, alors $N=-8310\ln p$

1. Le squelette d'un « Homme de Cro-Magnon » contient 5% du carbone 14 initial. Quel âge-a-t-il ?
2. Lucy est la forme la plus ancienne d'Hominidé connu ; les spécialiste lui donnent 4,4 millions d'années.
A-t-on pu raisonnablement dater les fragments trouvés à l'aide du carbone 14 ?
3. Découverte dans un glacier en 1991, la momie Hibernatus contenait 52,8% (à 1% près) du carbone 14 initial. Donner un encadrement de l'âge d'Hibernatus.

Exercice 4 : *Radioactivité*

La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N_1=N_0e^{-at}$, a étant une constante positive et N_t le nombre d'atomes contenus dans un échantillon de ce corps au temps t.

1. Représenter graphiquement la fonction $t\longmapsto N_t$
2. On désigne par T le temps au bout duquel $N_T=\frac{1}{2}N_0$.
Exprimer a en fonction de T. Comparer N_{t+T} à N_t. T est appelé « demi-vie » ou « période » du corps radioactif.
3. Au bout de combien de temps 1 g de radium perdra-t-il une masse de 1 mg (la période du radium étant de 1622 ans) ?
(La masse est proportionnelle au nombre d'atomes.)

Exercice 5 : Déterminer le plus petit entier n vérifiant :

1. $1{,}0001^n>10^{100}$
2. $0{,}999^n<10^{-100}$

Exercice 6 : Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

1. $x\longmapsto\sqrt{1+\ln^2 x}$
2. $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{x^2}$
3. $x\longmapsto x-\ln x$
4. $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
5. $x\longmapsto\sqrt{x}\ln x$
6. $x\longmapsto x\ln\sqrt{x}$

Exercice 7 : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln x+xe}{x^2}$$

On note Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal (Oâ£ć$\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique : 2 cm.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
   On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

   $$g(x)=-2\ln x-xe+1$$

   a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

   b. Etudier le sens de variation de g.

   c. Montrer que, dans $[0,5;1]$, l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule, notée α.
   Déterminer un encadrement de α à $0,1$ près.

   d. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. **Etude de la fonction f**

   a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que

   $$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

   puis étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

   c. Montrer que

   $$f(\alpha)=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$$

   d. Donner le tableau de variations de f.

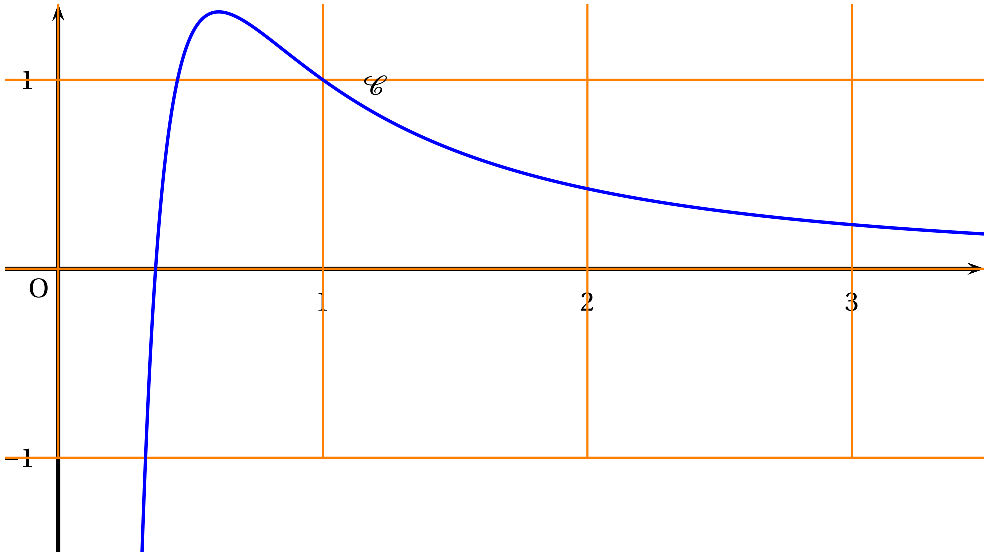
   e. Construire Γ

Exercice 8 : **Amérique du nord 2013**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

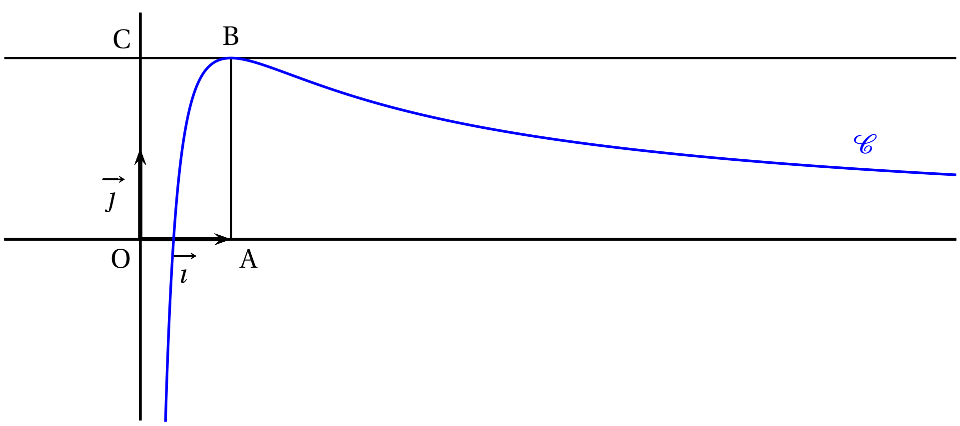
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 9 : **Métropole 2013**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- ⇝ les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 , 0), (1 , 2), (0 , 2) ;
- ⇝ la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- ⇝ il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.