∽ Exercices ∾ Vous saviez déjà que les mathématiques étaient complexes !

Exercice 1 : Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La partie réelle de $2i-3$ est -3.
2. La partie imaginaire de $4+5i$ est $5i$.
3. Les entiers naturels sont des nombres complexes.
4. $(1+i)^2$ est un imaginaire pur.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, déterminer les parties réelles et imaginaires du nombre z.

1. $z=(3-i)^2$
2. $z=(2i-1)(3+i)$
3. $z=3i(1+i)-5(2-3i)$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. *On donnera les solutions sous forme alégbrique.*

1. $3z+2-i=z+5+4i$
2. $(1+i)z=3-2i$
3. $-1-z^2=0$

Exercice 4 : **Equation produit dans $\mathbb{C}$**

1. Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$. Justifier que $0\times z=0$.
2. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1\times z_2=0$.
   - **a.** Démontrer que si $z_1\neq 0$ alors $z_2=0$.
     On pourra utiliser l'inverse de z.
   - **b.** Formuler la propriété ainsi démontrée.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z^2-4)(z^2+4)=0$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. *On donnera les solutions sous forme alégbrique.*

1. $(2-i)z+1=(3+2i)z-i$
2. $z+2i=iz-1$
3. $(3+2i)(z-1)=i$

Exercice 6 : Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'équation $z^2-z-2=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$
2. L'équation $z^4-1=0$ a quatre solutions dans $\mathbb{C}$
3. L'équation $z^4-1=0$ a quatre solutions dans $\mathbb{R}$
4. Pour tout nombre complexe z, $2z^2+6z+5=(z+1.5-0.5i)(2z+3+i)$

Exercice 7 : a, b et c sont des réels et a est différent de 0.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'équation $az^2+bz+c=0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$
2. Si l'équation $az^2+bz+c=0$ a pour solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, alors $z_1=\overline{z_2}$
3. Si l'équation $az^2+bz+c=0$ a pour solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, alors $az^2+bz+c=a(z+z_1)(z+z_2)$
4. Pour tout nombre complexe z, $2z^2+6z+5=(z+1.5-0.5i)(2z+3+i)$

Exercice 8 : Si n est un entier naturel non nul, on dit que le nombre complexe z est une racine n-ième de l'unité si on a : $z^n = 1$

1. si $n = 3$.

a. Déterminer une racine évidente dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$

b. Justifier que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$

2. si $n = 4$.

a. Déterminer deux racines évidentes dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$

b. Déterminer les réels a, b et c tels que $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(az^2 + bz + c)$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

Exercice 9 : On pose $\mathrm{P}(z) = z^3 - (6+i)z^2 + \alpha z - 13i$, où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $\mathrm{P}(i) = 0$.

2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z, $\mathrm{P}(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} z + z' = 5 \\ zz' = 6.5 \end{cases}$

Exercice 11 : On considère dans l'ensemble des nombes complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

1. Démontrer que (E) a une solution imaginaire pure.

2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 + az + b)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12 : On définit la fonction polynôme f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
On pourra poser $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, puis mettre $f(iy)$ sous forme algébrique et enfin traduire la nullité de $f(iy)$ par un système.

2. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.