AP
La suite des Suites !

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2} = \sum_{k=} \sin\frac{}{n^2}$$

On se propose de prouver que la suite (u_n) converge vers un réel a que l'on déterminera.

PARTIE A : **Approche à l'aide d'un algorithme**

On souhaite construire un algorithme permettant de calculer u_n pour tout entier $n \geq 1$.

1. On propose l'algorithme incomplet ci-contre.
   Le compléter de façon à résoudre le problème.
2. Programmer cet algorithme sur votre calculatrice et donner des valeurs approchées de u_{10}, u_{50} et u_{100}.
   Vérifier que l'unité d'angle de votre calculatrice est bien le radian.
3. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
n est un nombre entier non nul
Variable(s) :
i est un nombre entier non nul
u est un nombre réel.
Début
  $u \leftarrow 0$
  Pour i allant de …… à …… **Faire**
    $u \leftarrow u + \ldots$
  Fin Pour
  Renvoyer u.
Fin

PARTIE B : **Stratégie**

On admet que pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \sum$$

1. Calculer v_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (v_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
3. Démontrer que pour tout entier n non nul :
$$v_n - \frac{1}{24} \times \frac{(n+1)^2}{n^4} \leq u_n \leq v_n$$
4. En déduire la limite de la suite (u_n) et vérifier la conjecturer émise dans la partie A.

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf