I) Enquête sur les fonctions

I.1. Un problème de radioactivité

Travail de l'élève 1 : Le Radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps. On a pu observé qu'une quantité quelconque de tels noyaux diminue chaque jour d'environ 16.5%.
On aimerait connaître le temps de demi-vie du Radon, ie le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'une quantité donnée de radon se soit désintégrée de façon naturelle.

Partie A : Modélisation par une suite

Soit R_n la quantité de radon au bout de n jours, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la suite (R_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
   En déduire la proportion p_n de noyaux restants au bout de n jours, pour tout $n \geq 0$.
3. Déterminer à l'aide d'un tableau de valeurs le temps de demi-vie en jours du Radon.
4. Quelle critique pouvez-vous faire quant cette modélisation de la situation par une suite ?

Partie B : Modélisation par une fonction

Soit $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ est la quantité de noyaux de Radon restant au bout de X jours, et $p(\mathrm{X})$ la proportion de noyaux restant au bout de X jours, avec $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^+$ dans les deux cas.
Il paraît alors assez naturel de faire l'hypothèse que R et p sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, et que pour toute quantité initiale $\mathrm{R}(0)$ de Radon, la quantité $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ de Radon restant au bout de X jours, est $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = p(\mathrm{X}) \times \mathrm{R}(0)$, où $p(\mathrm{X})$ est un réel ne dépendant que de X.
On cherche alors à déterminer la forme d'une telle fonction p, si tant est qu'elle existe, pour répondre au problème donné.
Supposons déjà qu'une telle fonction p existe.

1. **Relation fonctionnelle**
   - **a.** Justifier que pour tous réels x et y positifs on a
   $$\mathrm{R}(x+y) = p(x+y) \times \mathrm{R}(0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(x+y) = p(x) \times \mathrm{R}(y)$$
   - **b.** En déduire que pour tous réels x et y positifs on a
   $$p(x+y) = p(x) \times p(y) \qquad (*)$$

   $(*)$ s'appelle une relation fonctionnelle.
   On dit que p transforme les sommes en produits.

   - **c.** Connaissez-vous de telles fonctions ? Peuvent-elles être celle que l'on cherche ?

   Vous remarquerez que l'on ne peut pas encore répondre à notre problème, qui semble plus compliqué que prévu. Aussi allons-nous étudier en détails les éventuelles fonctions f vérifiant la relation $(*)$

2. **Vérification de la cohérence avec la partie A.**
   - **a.** En remplaçant y par 0 dans la relation $(*)$, vérifier que la valeur de $p(0)$ est cohérente avec le contexte.
   - **b.** Vérifier que l'expression de la proportion trouvée sur les entiers naturels dans la partie A, question 2, vérifie bien $(*)$ pour tous n et m entiers naturels.

I.2. Etude de l'équation fonctionnelle : vers les primitives

Travail de l'élève 2 : On admet qu'il existe des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, non constantes sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{on a} \quad f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. **Conséquences directes**

   a. En remarquant que $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b. Démontrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$ alors pour tout réel x, on a $f(x) = 0$.
   En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c. Soit x un réel quelconque. En remplaçant y par une valeur bien choisie dans $(*)$ démontrer que

   $$f(0) = 1 \qquad \text{puis que} \qquad f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

   d. En déduire que pour tous réels x, y on a $\quad f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

   e. Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(nx) = \big(f(x)\big)^n$.

   f. Montrer que si f est continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. **Equation différentielle**
   Supposons de plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel quelconque. On pose $g : y \mapsto f(x+y)$ définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $g(y) = f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

   a. En dérivant la fonction g par rapport à sa variable y, montrer que $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

   b. En déduire que $f'(x) = k \times f(x)$ où k est un réel non nul.

   Ceci est vrai pour un réel x quelconque, donc ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi la fonction f cherchée, si elle existe, est proportionnelle à sa dérivée :

   $$f' = kf \quad \textbf{avec} \quad k \in \mathbb{R}^* \qquad (**)$$

   c. Connaissez-vous des fonctions vérifiant $(**)$?

I.3. Etude de l'équation différentielle $f' = f$: nécessité d'une condition initiale

<u>Travail de l'élève 3</u> : Pour simplifier le problème, intéressons nous aux éventuelles fonctions non nulles dérivables sur $\mathbb{R}$ et égales à leur dérivée, ie vérifiant l'équation différentielle (E) : $y' = y$.

1. Supposons qu'il existe une fonction f solution de (E).

a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g = \lambda f$.
Démontrer que g est aussi solution de (E)

b. Conclure sur le nombre de solutions de (E).

2. Supposons maintenant qu'il existe une fonction f solution de (E), et telle que $f(0) = 1$.
Autrement dit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les conditions :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

a. Soit c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = f(x)f(-x)$.

i. Montrer que $c(0) = 1$

ii. Montrer que c est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $c'(x) = 0$.

iii. En déduire l'expression de c.

b. Montrer alors que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

c. Soit g une fonction qui vérifie $(*)$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$.
Reprendre le raisonnement de la question 2a) pour montrer que nécessairement $g = f$.

d. Conclure sur le nombre de solutions de $(*)$.

I.4. Approche graphique par la méthode d'Euler

Travail de l'élève 4 : On cherche à construire de façon approchée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une éventuelle fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (*)$

Notons que l'on ne sait toujours pas si une telle fonction existe, mais si l'on arrive à tracer une courbe représentative, il sera alors assez légitime de considérer qu'une telle fonction existe bien (même si cela ne le démontre pas).

Comme on ne connait pas f, on ne peut pas déterminer l'ordonnée d'un point M de la courbe ayant pour abscisse x. On utilisera donc la méthode d'Euler pour approximer sa position. Elle consiste à dire qu'aux environs d'un point d'abscisse a, une courbe est assimiliable à sa tangente T_a en ce point.

1. Construire un repère orthonormé d'unité 10 cm pour $x \in [-0.1; 2]$ et placer le seul point connu de $\mathscr{C}_f$.
   On rappelle que la fonction f est positive, il est donc inutile de prévoir de la place sous l'axe des abscisses ...
2. **Avec un pas de** 1
   - **a.** Quel est le coefficient directeur de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
   - **b.** Tracer le segment porté par cette tangente pour $x \in [0; 1]$.
   - **c.** Si on assimile $\mathscr{C}_f$ à T_0, quelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?
   - **d.** En déduire une approximation du coefficient directeur de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis une approximation de $f(2)$.
3. **Avec un pas de** 0.5
   - **a.** Avec le tracé précédent, quelle approximation de $f(0.5)$ obtient-on ?
   - **b.** Quelle approximation du coefficient directeur de la tangente $\mathrm{T}_{0.5}$ peut-on en déduire ?
   - **c.** Tracer dans une autre couleur le segment porté par $\mathrm{T}_{0.5}$ pour $x \in [0.5; 1]$.
     Quelle nouvelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?
   - **d.** Continuer cette méthode avec un pas de 0.5 pour obtenir une meilleure approximation de $f(2)$.
4. **Avec un pas de** 0.25
   - **a.** Avec le tracé précédent, quelle approximation de $f(0.25)$ obtient-on ?
   - **b.** Quel approximation du coefficient directeur de la tangente $\mathrm{T}_{0.25}$ peut-on en déduire ?
   - **c.** En adaptant la méthode précédente, continuer vos calculs (sans arrondir !) et votre construction (dans une troisième couleur) pour en déduire une nouvelle approximation de $f(1)$.
5. **Avec un pas de** $h > 0$
   - **a.** En utilisant la méthode d'Euler, démontrer que

     $$f(h) \simeq 1 + h \qquad f(2h) \simeq (1+h)^2 \qquad f(3h) \simeq (1+h)^3$$

   - **b.** Démontrer finalement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

     $$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

   - **c.** On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand :

     $$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

     C'est la suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ *qui sert à démontrer rigoureusement l'existence de la fonction f, mais nous ne le ferons pas, rassurez-vous !*
   - **d.** A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100 et 1000.
   - **e.** En prenant $n = 1000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1)$