Travail de l'élève 1 : *On utilise le logiciel Géogébra. La figure peut être vidéo-projetée*

1. **Figure de base**
   - **a.** Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O; I; J)$.
   - **b.** Choisir le radian comme unité d'angle dans « Options ».
   - **c.** Tracer le cercle trigonométrique de centre O.
   - **d.** Créer un curseur t, variant entre -5π et 5π.
   - **e.** On veut placer un point M associé au réel t sur le cercle.
     Pour cela, dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1; t)$

     Remarque : Attention, le point-virgule est essentiel ! En effet, le couple $(1; t)$ ne désigne pas pour Géogébra les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O; I; J)$, mais lui indique que M sera à une distance 1 de l'origine O du repère (donc il sera bien sur le cercle), et tel que $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right) = t$ radians. On parle de coordonnées **polaires**.

   - **f.** Créer en ligne de commande le point C de coordonnées $(x_M, 0)$ et le point S de coordonnées $(0, y_M)$
2. **Variations**
   - **a.** Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O; I; J)$? Son ordonnée ?
   - **b.** Avec le curseur, déplacer le point M.
     Décrire son trajet, ainsi que ceux de C et de S correspondants.
   - **c.** En déduire les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[-5\pi; 5\pi]$.
     On précisera les valeurs où ces fonctions s'annulent.
3. **Courbes représentatives**
   - **a.** Compléter la figure précédente en crééant les points R et Q de coordonnées respectives (t, x_M) et (t, y_M).
   - **b.** Faire afficher leurs traces. Quelles courbes représentatives voient-on se dessiner ?
   - **c.** Vérifier la cohérence entre les courbes obtenus et vos tableaux.
4. **Propriétés**
   - **a.** Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?
   - **b.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?
   - **c.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\leq \cos(x) \leq \qquad \text{et} \qquad \leq \sin(x) \leq$$

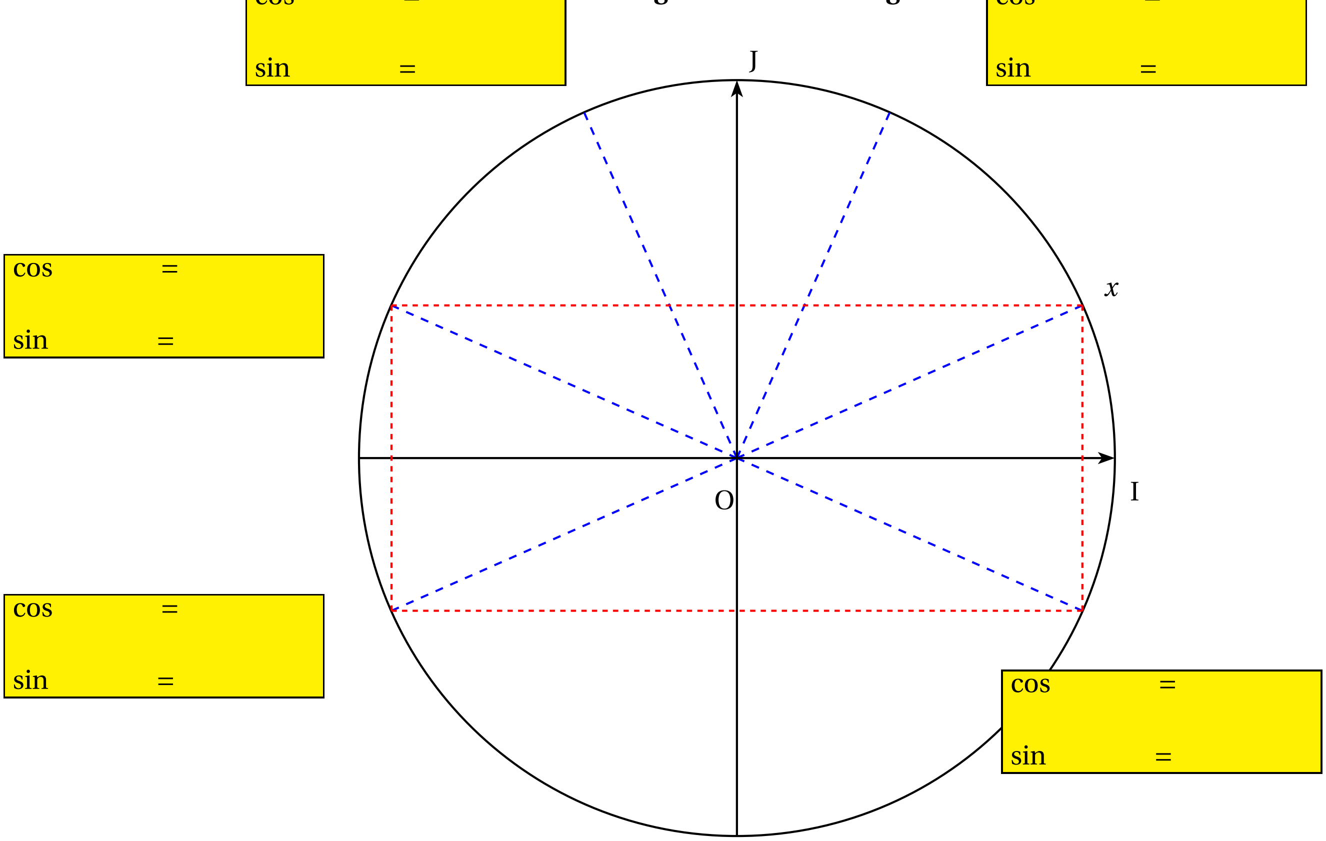
$$\cos(x + 2\pi \times k) = \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2\pi \times k) = \qquad \text{où } k \in$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) =$$

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1					
$\sin x$	0					
$\tan x$	0					

Configuration du rectangle



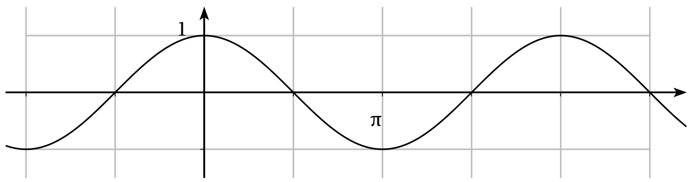
Pour tous réels a et b on a :

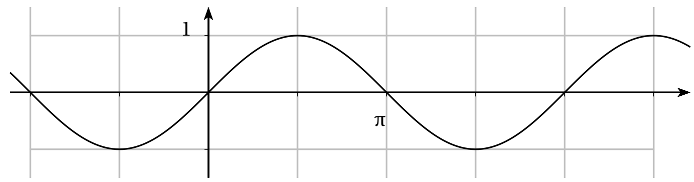
$$\cos(a + b) =$$

$$\sin(a + b) =$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	-1





Travail de l'élève 2 : L'objectif de cette activité est de montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0 et que l'on a :

$$\sin'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos'(0) = 0$$

1. Traduire l'objectif de l'activité en termes de limite de taux de variation.
2. Montrons que la fonction sin est dérivable en 0 et que $\sin'(0) = 1$.
   On munit le cercle trigonométrique d'un repère (O, I, J).
   On considère un réel $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on appelle M son point associé sur le cercle trigonométrique et N le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle en I.
   - **a.** Faire un schéma de la situation.
   - **b.** Montrer que $IN = \tan h$
   - **c.** En rangeant dans l'ordre croissant les aires des triangles OIM, OIN et celle du secteur de disque OIM, montrer que pour tout $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :
   $$\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$$
   - **d.** En déduire que pour tout $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :
   $$\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1 \qquad (\star)$$
   - **e.** On montre de même que $(\star)$ est vrai pour tout $h \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.
   Conclure.
3. Montrons que la fonction cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$
   - **a.** Montrer que pour tout $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a :
   $$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\sin h}{h} \times \frac{-\sin h}{\cos h + 1}$$
   - **b.** Conclure.

Travail de l'élève 3 : L'objectif de cette activité est de démontrer que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et de déterminer leur fonction dérivée.
Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Exprimer le taux de variation $\tau(a, h)$ de la fonction sin en a.
2. En utilisant le fait que pour tous réels a, b on a $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, démontrer que

$$\tau(a, h) = \sin a \times \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}$$

3. En déduire que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
4. En utilisant le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, démontrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

Travail de l'élève 4 : Pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, on rappelle que l'on définit la fonction tangente par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction tan
2. Montrer que la fonction tan est π−périodique. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Montrer que la fonction tan est impaire. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Proposer alors un intervalle minimal I pour étudier la fonction tan.
5. On se place sur cet intervalle I.
   Justifier que la fonction tan est dérivable sur I et que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

6. En déduire les variations de la fonction tan sur I.
7. Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de I. Interpréter graphiquement.
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction tan en 0.
9. Calculer $\tan \frac{\pi}{4}$.
10. En utilisant les données précédentes, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction tan sur $]-2\pi; 2\pi[$.