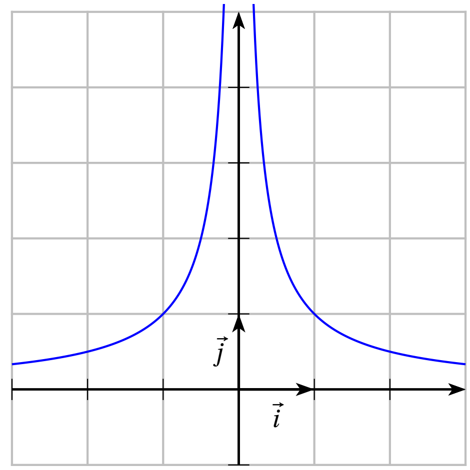
II.2.b. Des limites à droite et à gauche infinies

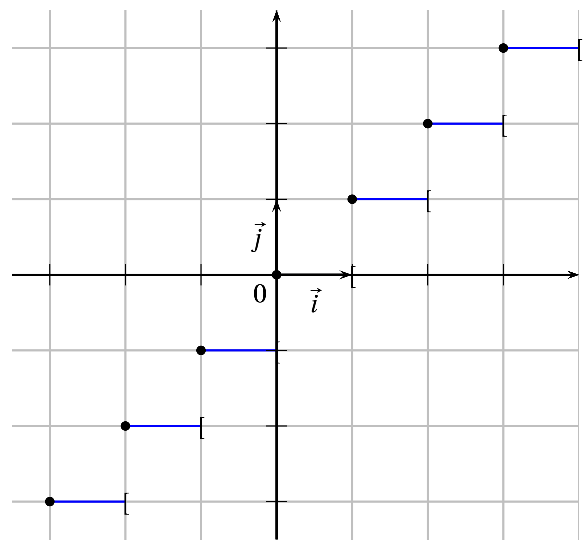


Regardons la fonction

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{Si } x \neq 0 \\ 10^{10^6} & \text{Sinon} \end{cases} \end{array}$$

On constate que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ldots\ldots$
Cependant, $f(0) = \ldots\ldots\ldots$
Cette fonction est donc bien définie en 0 mais elle n'est pas continue en 0 et il n'existe aucune valeur possible pour $f(0)$ qui la rendrait continue en 0.

II.2.c. Des limites à droite et à gauche réelles mais différentes



Observons la fonction partie entière, notée E, définie sur $\mathbb{R}$:

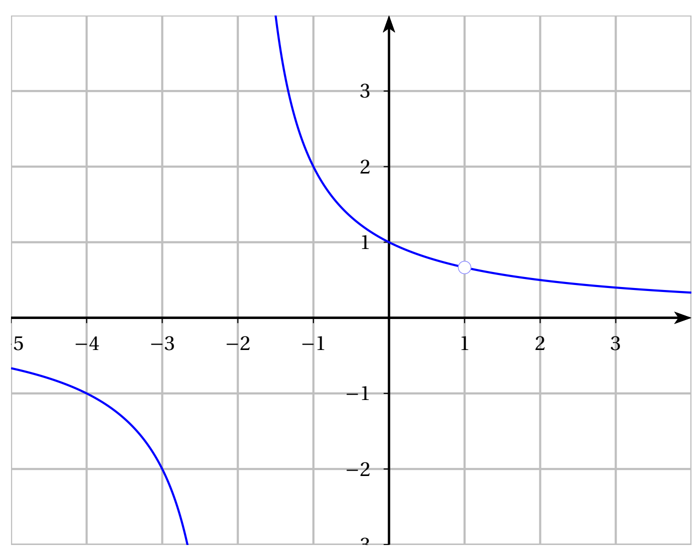
$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{E}(x)$ = le plus grand entier inférieur ou égal à x

Par exemple $\mathrm{E}(\pi) = \ldots\ldots\ldots$ et $\mathrm{E}(-\pi) = \ldots\ldots\ldots$ [1]
Ci-contre, nous avons tracé $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$.
Il est clair que E est continue sur tout intervalle du type $]x; x+1[$ où $x \in \ldots\ldots\ldots$
Par contre, E admet des discontinuités en ....
En effet on a par exemple :

$$\lim_{x\to 2^+} \mathrm{E}(x) = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^-} \mathrm{E}(x) = \ldots\ldots$$

Les limites à droite et à gauche étant différentes, la fonction partie entière n'admet pas de limite en 2.
Elle est donc discontinue en 2.

II.2.d. Des limites à droite et à gauche réelles et égales : les fonctions prolongeables par continuité



Reprenons l'exemple de la partie II.1) :

$$k: \begin{array}{lcl} \mathbb{R}\backslash\{-2;1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-2}{x^2+x-2} \end{array}$$

Cela n'a pas de sens de parler de la discontinuité de k en ...... et .... Par contre, on a déjà vu que $\lim\limits_{x\to 1^+} k(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} k(x) =$ ....

1. On remarquera que la fonction partie entière des mathématiciens n'est pas symétrique par rapport à 0, contrairement à celle des informaticiens qui considèrent que $\mathrm{E}(-\pi) = -3$

Ainsi, la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{x^2+x-2} & \text{Si } x \neq 1 \\ \text{............} & \text{Si } x = 1 \end{cases}$ **n'est pas continue en** 1.

Par contre,la fonction l définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $l(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{x^2+x-2} & \text{Si } x \neq 1 \\ \text{............} & \text{Si } x = 1 \end{cases}$ **est continue en** 1.

On dit que l'on a prolongé par continuité la fonction k en ....

Remarque : Par contre, on sait que $\lim\limits_{x\to 2^+} k(x) = $ ...., $\lim\limits_{x\to 2^-} k(x) = $ ....

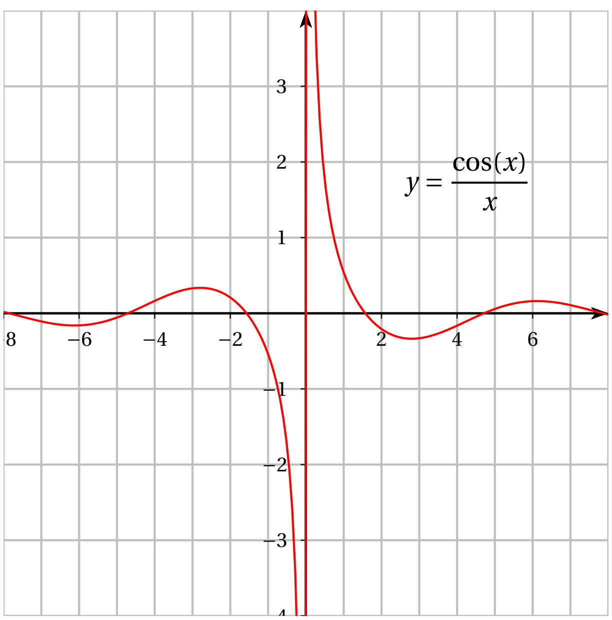
On ne peut donc pas trouver de valeur pour l'image de -2 qui prolongerait k par continuité.

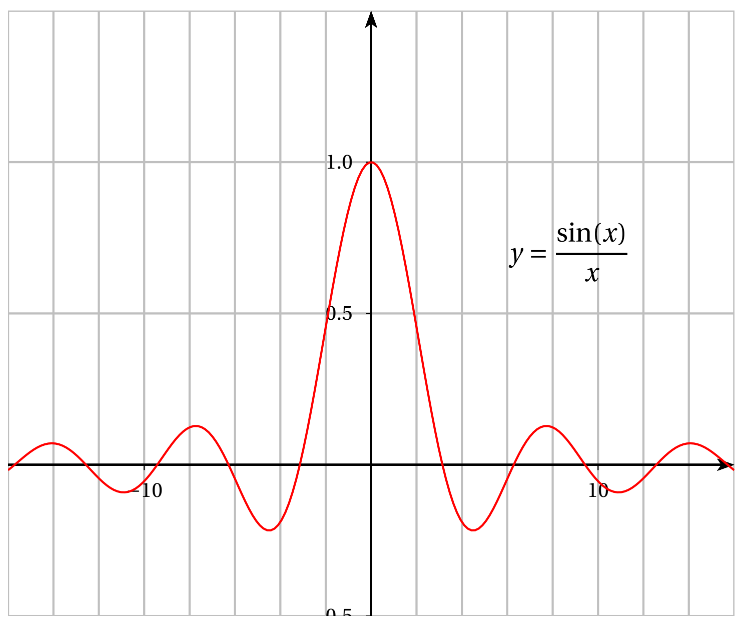
Question :

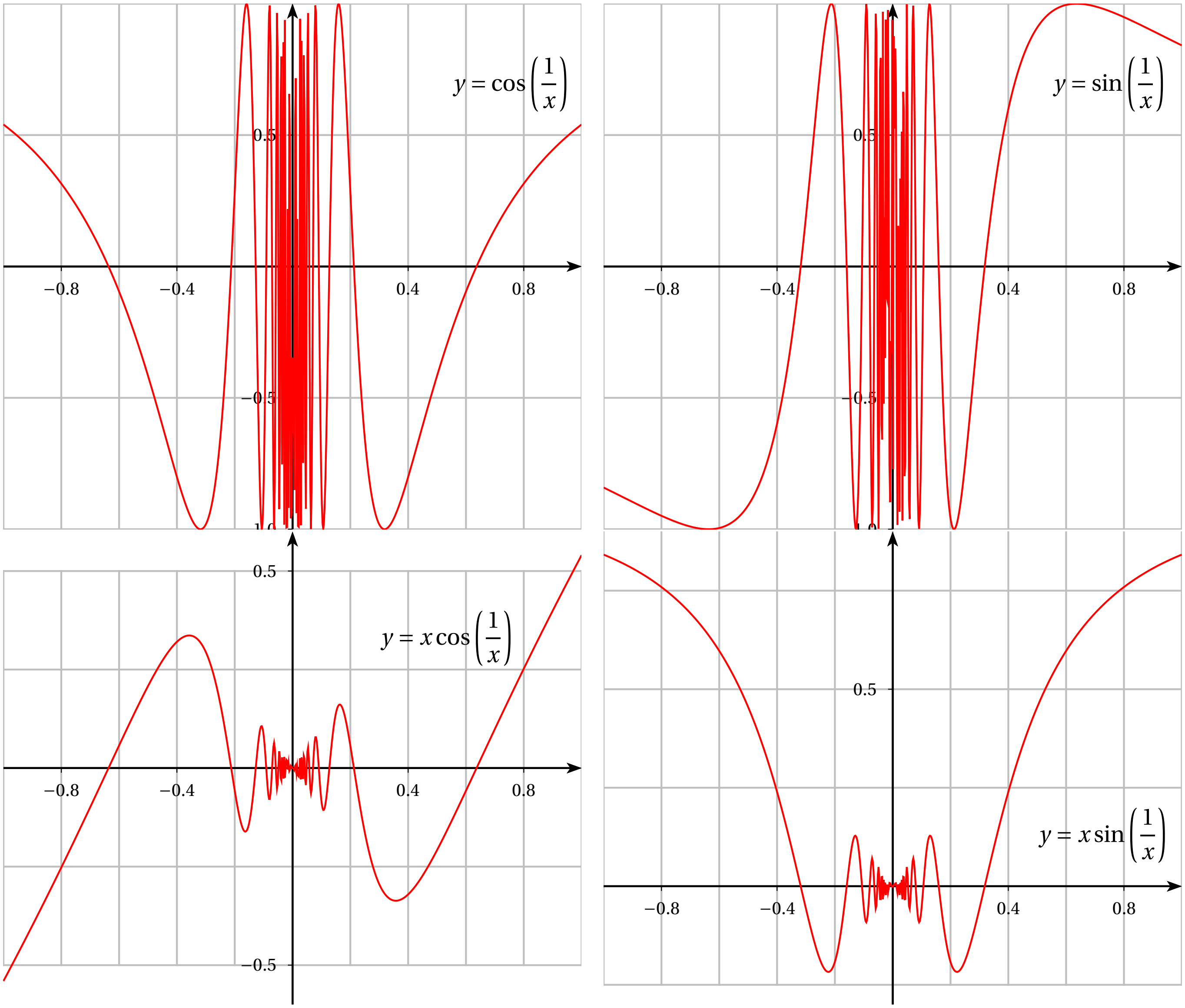
Graphiquement, dire si les fonctions suivantes peuvent être prolonger par continuité en 0.
Si oui, proposer une valeur pour l'image de 0 puis démontrer votre conjecture si possible.

$$f : x \longmapsto \frac{\cos(x)}{x} \qquad g : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x} \qquad h : x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad k : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$l : x \longmapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad m : x \longmapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad n : x \longmapsto \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \quad \text{et} \quad p : x \longmapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$







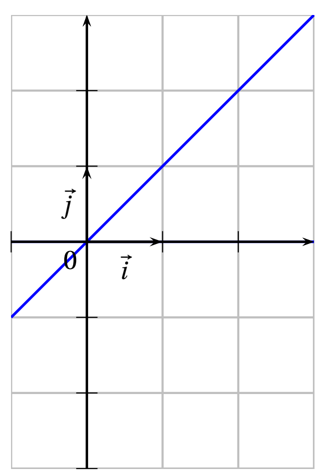
II.2.e. Une fonction « monstre »

Attention !

Voici un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$, non continue, et dont la représentation graphique se trace pourtant à l'aide d'un trait continue à l'oeil nu :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En apparence on pourrait croire que cette courbe se trace sans lever le crayon et pourtant la fonction présente une infinité de discontinuité (en tout réel !!)



Exercice du Cours : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$

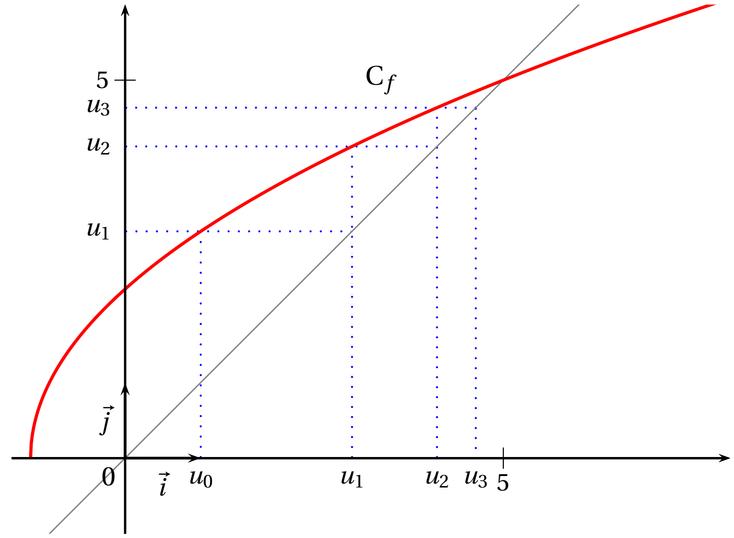
1. a. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.

2. Expliquer pourquoi ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).



Exercice du Cours : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$

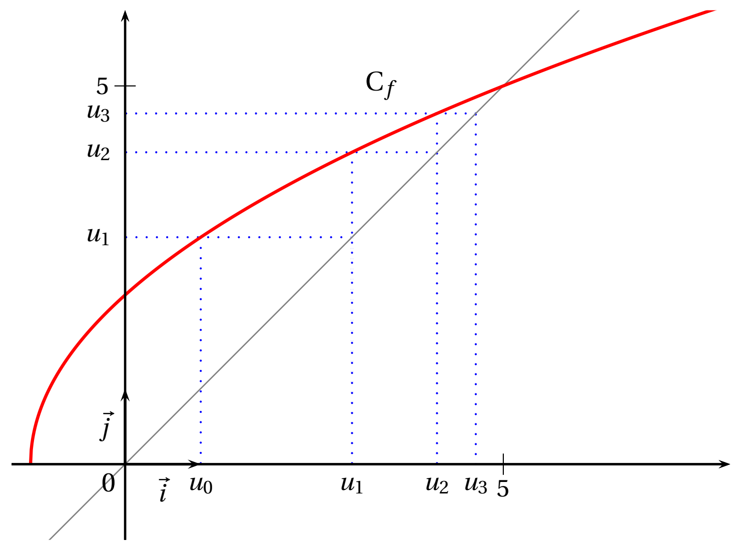
1. a. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.

2. Expliquer pourquoi ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).



Exercice du Cours : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$

1. a. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.

2. Expliquer pourquoi ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).