Travail de l'élève 1 : **Une conjecture valable pour chaque rang n**

1. Calculer à la main les premiers termes de la suite jusqu'à u_5.
2. Etablir à la calculatrice le tableau de valeurs de (u_n) et vérifier vos résultats.
3. La plupart des calculatrices n'affichent pas dans leur tableau une valeur exacte à partir de u_{20}.
   Grâce aux premières lignes de ce tableau, conjecturer la valeur exacte de u_{33} et u_{34}.
4. Ces résultats sont-ils certains ? Que faudrait-il faire pour les vérifier ?
5. Quelqu'un a eu le courage de se lancer dans cette vérification et a trouvé $u_{33} = 8\,589\,934\,591$, mais pour u_{34}, sa calculatrice ne donne qu'une valeur approchée.
   Vérifier à la calculatrice votre conjecture pour u_{33}, puis, sans calculatrice, vérifier votre conjecture sur u_{34}.
6. Conjecturer une formule explicite pour calculer u_n. Ce résultat est-il certain pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice du Cours : Compléter la démonstration par récurrence suivante, afin de montrer que la somme des n premiers entiers non nuls vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On veut montrer que la proposition « » est vraie pour tout $n \geq$

- **Initialisation :** pour $n =$
  - La somme des n premiers entiers non nuls vaut
  - Et $\dfrac{n(n+1)}{2} =$

  Donc la proposition est vraie au rang .

- **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier $k \geq$ tel que

  On cherche à montrer que

  Or $1+2+3+\cdots+\cdots+(k+1) =$

  $=$

  $=$

  La proposition est vraie au rang .
  Donc la proposition est

- **Conclusion** : La proposition est et .
  Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

Exercice du Cours : On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$.

Travail de l'élève 2 :

On considère les suites u et v définies pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Et on donne l'algorithme ci-contre.

Algorithme 1 :

Variable(s) :
n est un nombre entier et u est un nombre réel.
Début
$n := 1$; $u := 1$
Tant que $(u \geq 10^{-3})$ **Faire**
$n := n + 1$
$u := \dfrac{1}{n^2}$
Fin Tant que
Renvoyer n
Fin

1. **a.** Compléter le début de trace de l'algorithme ci-dessus.

n					
u					

b. A quel résultat aboutit la mise en oeuvre de l'algorithme ci-contre ?

c. Fabrice affirme : « $\forall n \geq 32$ on a $u_n < 10^{-3}$ »

i. Proposer une traduction française de cette phrase mathématique.

ii. Fabrice a-t-il raison ? Expliquer.

2. **a.** Modifier cet algorithme pour obtenir la première valeur N telle que $u_{\mathrm{N}} < 10^{-6}$.

b. Que renvoit alors l'algorithme ?

c. Loïc affirme : « $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}$ on a $u_n < 10^{-6}$ »

i. Proposer une traduction française de cette phrase mathématique.

ii. Loïc a-t-il raison ? Expliquer.

d. Soit ϵ un réel strictement positif.
Démontrer qu'il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$ on ait :

$$0 < u_n < \epsilon$$

e. Norbert affirme : « $\forall \epsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}$ on a $0 < u_n < \epsilon$ »

i. Proposer une traduction française de cette phrase mathématique.

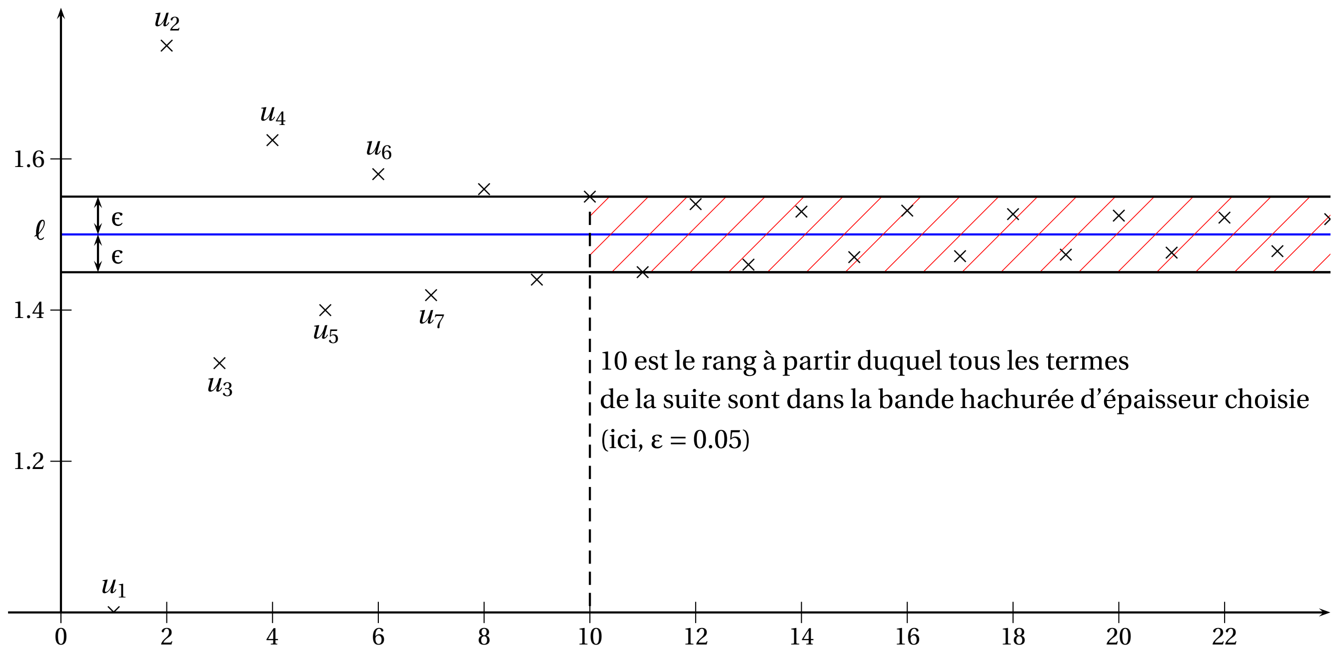
ii. Norbert a-t-il raison ? Expliquer.

On dit que la suite u converge vers 0 ou que la limite de la suite u est 0, on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

3. Démontrer de façon analogue que la suite v converge vers 0.

Illustration graphique : Avec la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n}$



Exercice du Cours :

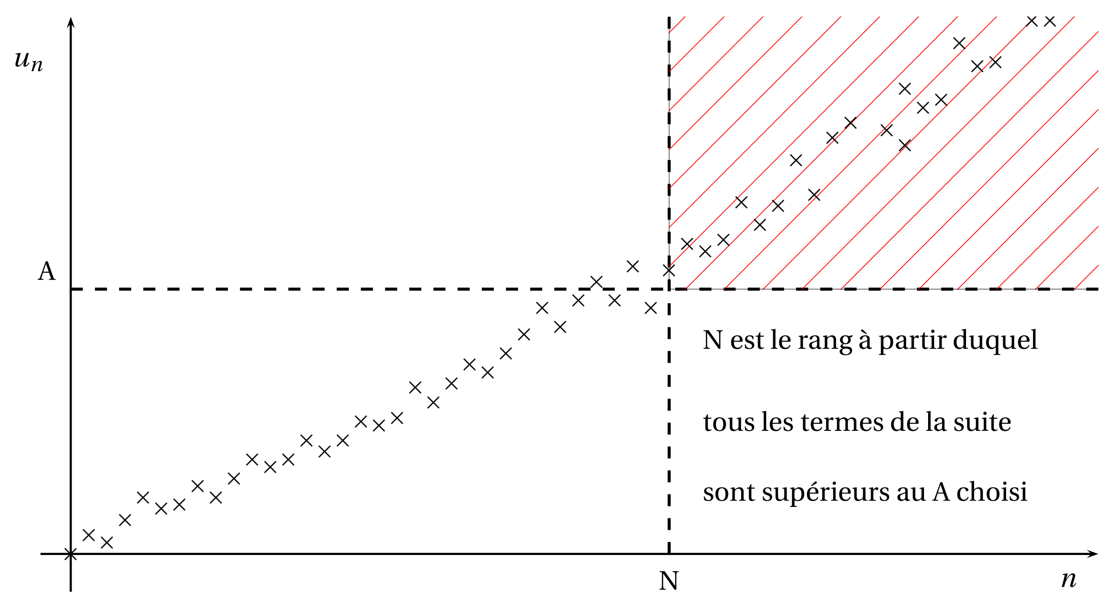
1. Conjecturer à la calculatrice les limites éventuelles des suites suivantes, puis les démontrer.

a. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ **b.** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} : v_n = \dfrac{5n+1}{n+3}$ **c.** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} : w_n = (-1)^n$

2. **a.** A partir de quel rang N la distance entre u_n et sa limite est-elle strictement inférieur à 0.001 ?

b. Même question pour (v_n).

Illustration graphique :



Exercice du Cours :

1. Démontrer que chacune des suites suivantes diverge vers $\pm\infty$:
   a. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme génral $u_n = n$
   b. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = n^2$
   c. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme génral $w_n = -(n+1)^2$
2. a. A partir de quel rang a-t-on $u_n > 10^6$?
   b. Même question pour v_n.
   c. A partir de quel rang a-t-on $w_n < -10^6$?

Cas d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$						

Cas d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n)$				

Cas d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ ou ∞	0	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	0	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$						

Exemples de programmation

Sur **Algobox** :

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE e
  TANT_QUE (abs((N+1)/(2*pow(N,3)+1))>=e) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le rang associé à "
  AFFICHER e
  AFFICHER " est "
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

Sur **TI 89** :

```
:exo66p35(e)
:Prgm
:0→n
:While abs((n+1)/(2*n^3+1)
 )≥e
:n+1→n
:EndWhile
:Disp "le rang associe a "
 ,e," est ",n
:EndPrgm
```

Sur **TI 82 à 84** :

```
PROGRAM:EXO66P35
:0→N
:Prompt E
:While abs((N+1)
/(2N^3+1))≥E
:N+1→N
:End
:Disp "LE RANG A
SSOCIE A ",E," E
ST ",N
```

Sur **Scilab** :

```
N=0;
e=input("espilon=");
while abs((N+1)/(2*N^3+1))>=e
  N=N+1
end
disp(N,"est",e,"Le rang associé à");
```

Sur **TI Nspire CX CAS** :

Define LibPub **exo66p35**(e)=

Prgm

$n:=0$

While $\left|\dfrac{n+1}{2\cdot n^3+1}\right|\geq e$

$n:=n+1$

EndWhile

Disp "le rang associe a ",e," est ",n

EndPrgm

Sur **Casio**, les commandes sont les mêmes, sauf pour la saisie et l'affichage des variables, respectivement écrites ainsi :

`? → N` et `N ◄`