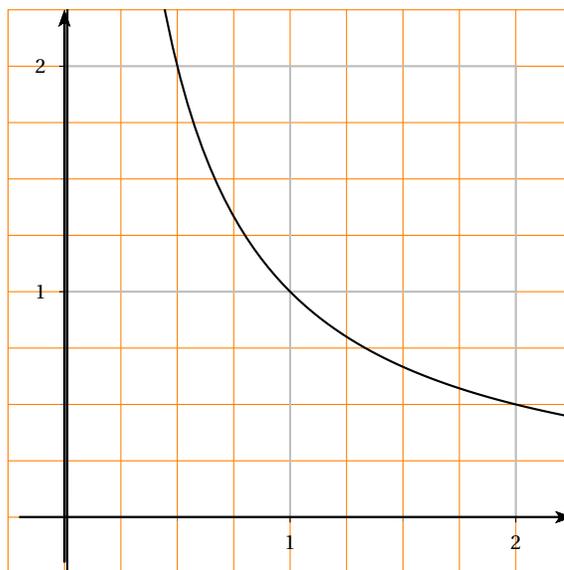
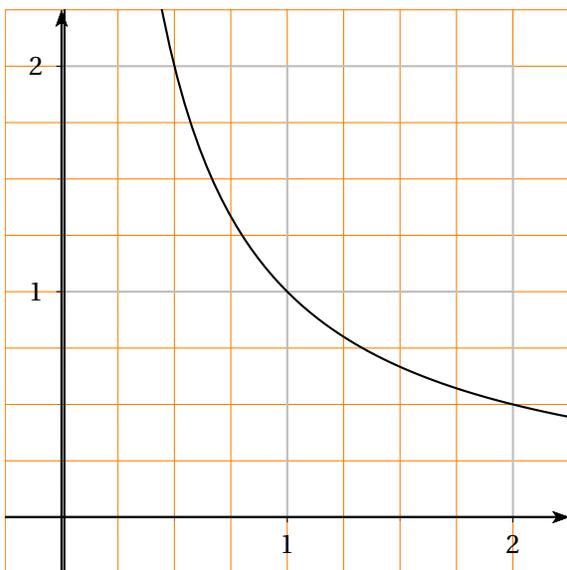


Travail de l'élève 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f(t) = \frac{1}{x}$. On a dessiné ci-dessous sa courbe représentative \mathcal{C}_f .

1. Comment encadrer l'aire \mathcal{A} comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?



2. On a finalement découpé l'intervalle $[1;2]$ en quatre sous-intervalles de même amplitude $\frac{1}{4}$.

a. Justifier que :

$$\frac{f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)+f\left(1+\frac{4}{4}\right)}{4} \leq \mathcal{A} \leq \frac{f(1)+f\left(1+\frac{1}{4}\right)+f\left(1+\frac{2}{4}\right)+f\left(1+\frac{3}{4}\right)}{4}$$

b. On a effectué les calculs ci-contre à l'aide du logiciel Xcas.

En déduire un encadrement de \mathcal{A} entre deux décimaux avec deux chiffres après la virgule.

1	<code>f(x):=1/x</code>	
		$x \rightarrow \frac{1}{x}$
2	<code>approx(somme(f(1+k/4),k,0,3))</code>	3.0380952381
3	<code>approx(somme(f(1+k/4),k,1,4))</code>	2.5380952381
4	<code>approx(somme(f(1+k/1000),k,0,999))</code>	693.39724306
5	<code>approx(somme(f(1+k/1000),k,1,1000))</code>	692.89724306

3. Soit $n \geq 1$. On découpe l'intervalle $[1;2]$ en n sous-intervalles de même amplitude.

a. Généraliser la méthode précédente pour obtenir un encadrement de \mathcal{A} dans ce cas, en fonction de n .

b. Déduire des autres résultats du logiciel Xcas un encadrement plus précis de \mathcal{A} , en précisant en le nombre n utilisé.

4. On propose l'algorithme ci-contre.

- a. Qu'affiche l'algorithme quand on rentre la valeur $n = 4$?
- b. Que fait-il ?
- c. Pour $n = 10$, il renvoie la valeur 0.05, pour $n = 20$, la valeur 0.025, pour $n = 50$, la valeur 0.01.
Justifier que l'amplitude de l'encadrement de \mathcal{A} lorsque l'on découpe l'intervalle $[1;2]$ en n sous-intervalles de même amplitude est $\frac{1}{2n}$.
- d. Quelle était la meilleure amplitude obtenue jusqu'à présent ?
- e. Pour quelles valeurs de n obtient-on un encadrement de \mathcal{A} à 0.0001 près ?
- f. Modifier l'algorithme pour qu'il vous en procure un.

```

1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  k EST_DU_TYPE NOMBRE
4  U EST_DU_TYPE NOMBRE
5  V EST_DU_TYPE NOMBRE
6  E EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8  LIRE n
9  U PREND_LA_VALEUR 0
10 V PREND_LA_VALEUR 1/n
11 POUR k ALLANT_DE 1 A n-1
12   DEBUT_POUR
13   U PREND_LA_VALEUR U+1/(n+k)
14   V PREND_LA_VALEUR V+1/(n+k)
15   FIN_POUR
16 U PREND_LA_VALEUR U+1/(2*n)
17 E PREND_LA_VALEUR V-U
18 AFFICHER E
19 FIN_ALGORITHME

```

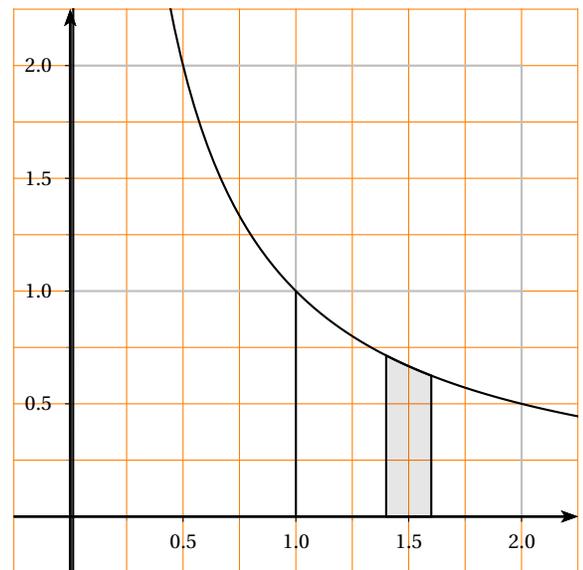
5. Pour tout $t > 1$, on note $S(t)$ l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$ et la courbe \mathcal{C}_f .

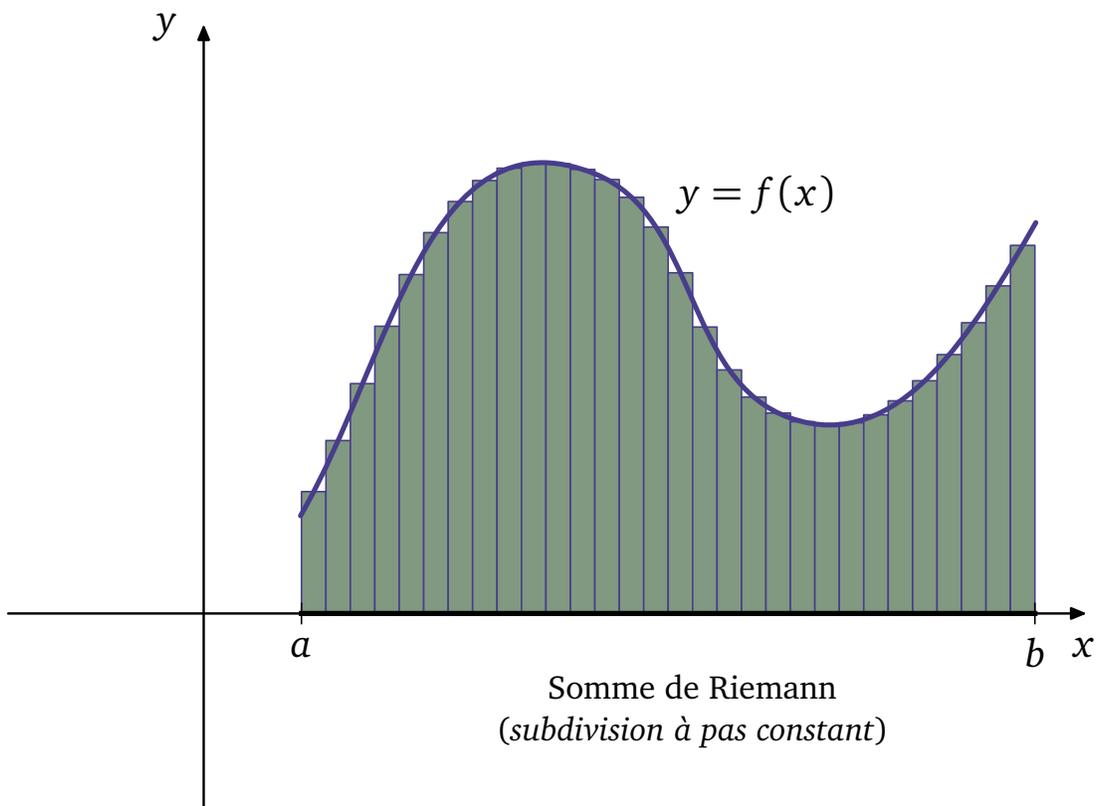
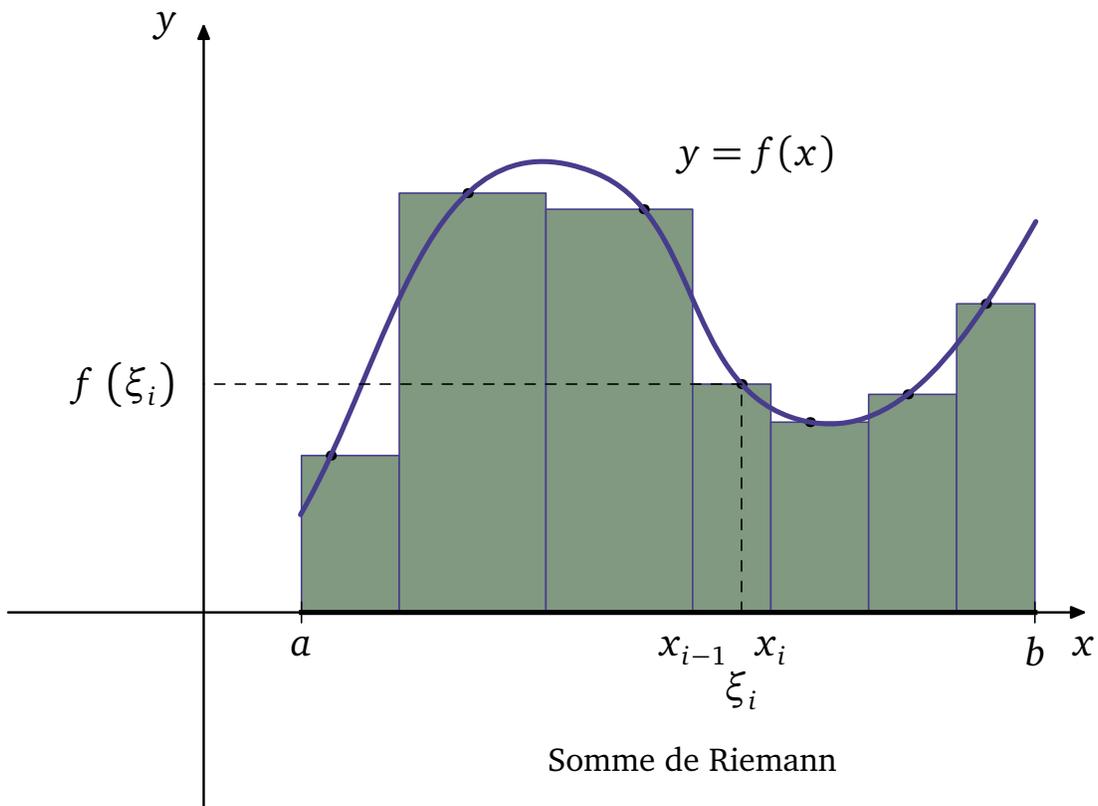
Soient a et h deux réels tels que $a \geq 1$ et $h > 0$.

- a. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que

$$\frac{1}{a+h} \leq \frac{S(a+h) - S(a)}{h} \leq \frac{1}{a}$$

- b. Proposer une conclusion.
- c. En déduire une valeur exacte possible pour \mathcal{A} et contrôler sa cohérence avec l'encadrement trouvé précédemment.
- d. Proposer une valeur exacte pour l'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.





 **Exemples :**

1. On considère une fonction f constante égale à $k \geq 0$.

a. Proposer une valeur pour $\int_a^b f(x) dx$ dans le cas particulier où $k = 0$, puis pour $k = 1$.

b. Même question dans le cas général.

2. On considère une fonction affine f positive sur le segment $[a; b]$ et définie par $f(x) = mx + p$

a. Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[1; 8]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Déterminer alors $\int_1^8 \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx$

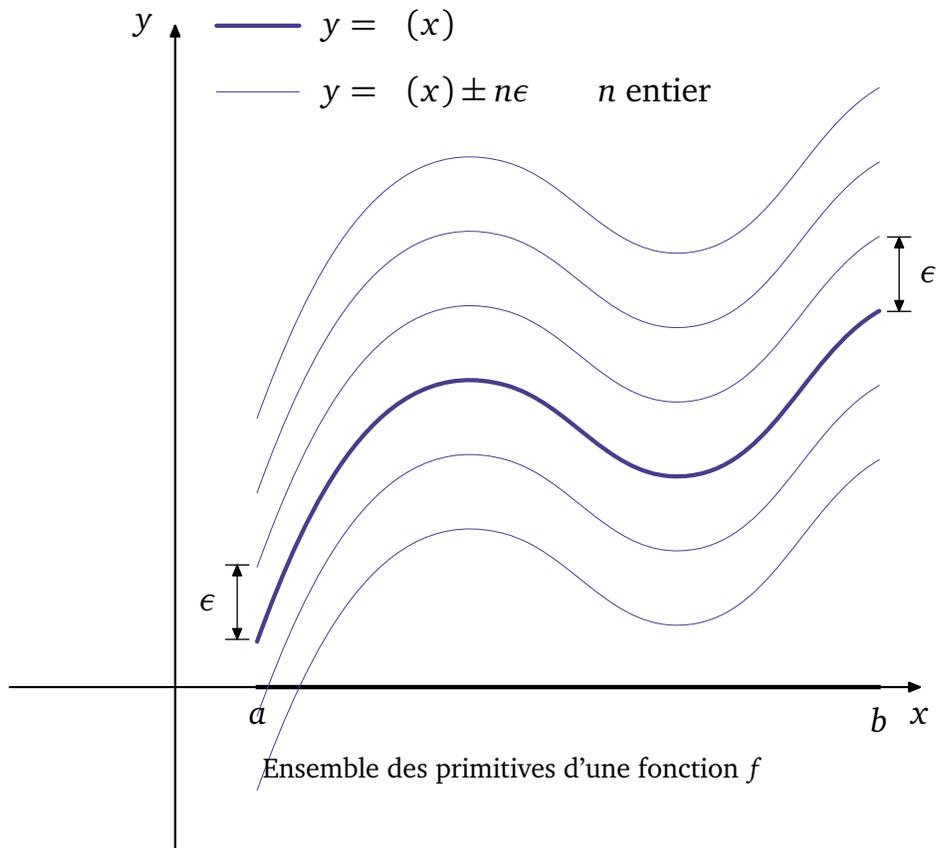
b. Proposer une valeur pour $\int_a^b f(x) dx$ dans le cas général.

3. Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a. Vérifier que la courbe \mathcal{C}_f représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

b. En déduire que

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

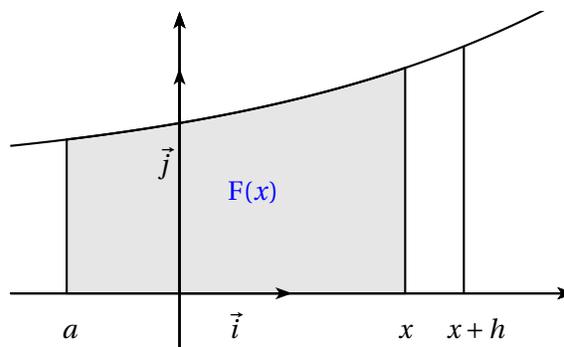


 **Travail de l'élève 2 :**

On considère une fonction f continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$. Soit F la fonction suivante :

$$F : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$



1. Soit h un réel strictement positif.

a. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x) dx$.

Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.

b. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

2. Répondre aux mêmes question pour $h < 0$.

3. Quelle hypothèse sur f nous permet d'affirmer que $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$?

4. Que pouvez-vous en déduire sur la fonction F ?

5. Que vaut $F(a)$?

6. Conclure.

7. **Application** : proposer une valeur possible pour $\int_2^4 t^2 dt$.

Est-on sûr qu'il s'agisse de la bonne ?

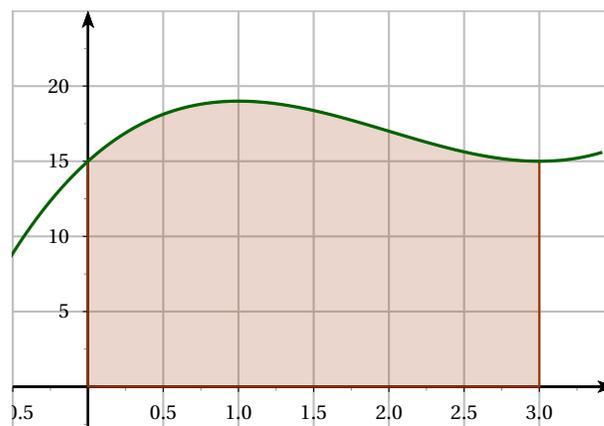
 **Travail de l'élève 3 :** Un problème d'aplanissement.

Loïc possède un terrain qu'il souhaite aplanir en rabotant les bosses et en comblant les creux.

Comme il est radin, il ne souhaite pas faire venir de la terre ou des pierres de l'extérieur, et ne veut pas non plus en évacuer hors de son terrain.

En coupe, le terrain ressemble à la figure ci-contre.

A quelle altitude va se trouver le terrain de Loïc ?



Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Primitive $F, c \in \mathbb{R}$	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)		
$f(x) = x$		
$f(x) = ax + b$ (a et b réel)		
$f(x) = \frac{1}{x^2}$		
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)		Si $n \geq 0$: Si $n \leq -2$:
$f(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = e^x$		
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x) = \cos x$		
$f(x) = \sin x$		

Opération sur les primitives

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Une Primitive	Conditions
$u' + v'$		
ku' (k constante)		
$u'u^n$		
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$		
$\frac{v'}{v^2}$		
$u'e^u$		
$\frac{u'}{u}$		