CHAPITRE 9

MÊME LE PLAN EST COMPLEXE !

HORS SUJET

TITRE : « Autoportrait avec cigarette (1895) » et « La madone (1895-1902) »
AUTEUR : EDVARD MUNCH
PRÉSENTATION SUCCINTE : Edvard Munch (1863 - 1944) est un peintre expressionniste norvégien, souvent considéré comme le pionnier de l'expressionnisme et très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Europe. L'importance de son œuvre est aujourd'hui reconnue dans le monde.
Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment *Le Cri* (1893) (cf fin du cours), pièce de la série *La Frise de la Vie*, que Munch a assemblée au tournant du siècle. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus l'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.
Munch traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au le Musée Munch dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la galerie nationale d'Oslo. L'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Enfin, la pinacothèque de Paris a organisé en 2010 la superbe exposition *Anti-Cri* regroupant de nombreux tableaux de Munch, issus de collections privées.
Le Cri et *La Madone* ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège... Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

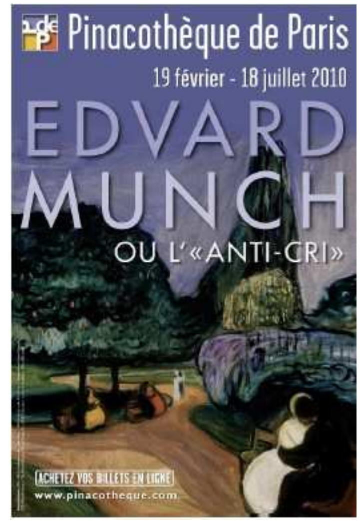
L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir l'affixe d'un nombre complexe
- ⇝ Interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe
- ⇝ Les utiliser pour placer un nombre complexe dans le plan
- ⇝ Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle d'un nombre complexe
- ⇝ Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes géométriques

« La maladie, la folie et la mort sont les anges noirs qui ont veillé sur mon berceau »
EDVARD MUNCH

CHAPITRE 9:

MÊME LE PLAN EST COMPLEXE !



Résumé

Nous l'avons évoqué dans un précédent chapitre, les nombres complexes trouvent de nombreuses applications géométriques, et c'est même par ce biais qu'ils ont acquis une crédibilité auprès des mathématiciens, lorsqu'au XIX^e siècle, Argand les associe aux points du plan.
C'est grâce à cela que l'on a pu établir une démonstration rigoureuse de l'existence de $\mathbb{C}$, en explicitant sa construction.
Cette démonstration n'est absolumment pas au programme, et même si vous pourriez en saisir quelques éléments, vous ne pourriez pas en saisir l'essence, vos connaissances sur les ensembles et leurs propriétés étant encore trop obscures et trop peu diversifiées (il existe des ensembles par exemple, où la multiplication n'est pas commutative, comme pour les ensembles de nombres : cf les matrices en spécialité).
Une idée de cette démonstration est présente en annexe, à la fin de ce cours, pour ceux qui souhaiteraient approfondir.
Mais voyons donc les bases de cette géométrie de plus près.

I) L'ensemble $\mathbb{C}$ d'un point de vue géométrique

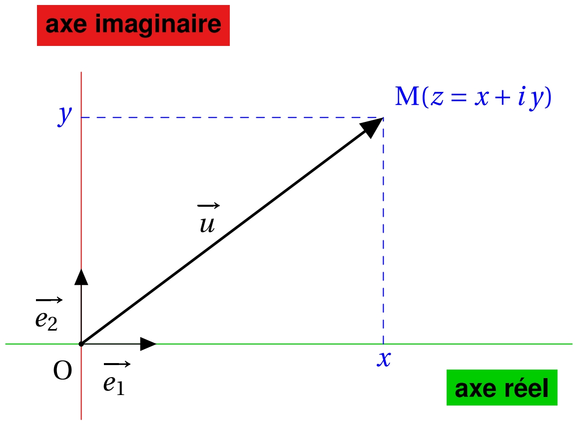
I.1. Le plan complexe

Montrer en introduction le film « Dimension Math - Chapitre 5 » de Jos Leys, Etienne Ghys et Aurélien Alvarez

Dans tout le chapitre, on munit un plan orienté d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Définition 1.

À tout nombre complexe $z = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M de coordonnées (x, y) et on note souvent $\mathrm{M}(z)$.
Réciproquement, à tout point M du plan de coordonnées (x, y), on associe un unique nombre complexe $z = x + iy$, appelée **affixe** du point M, souvent noté z_{M}.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) on associe une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$ et réciproquement.



Exemples :

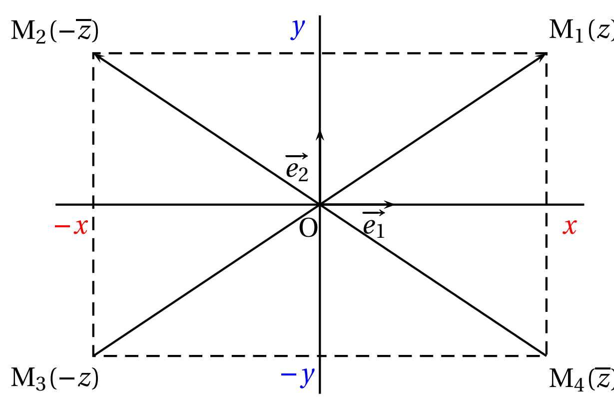
$z = 2-5i$ correspond au point $\mathrm{M}(2;-5)$ et réciproquement.
L'affixe du point M est le nombre complexe $z_{\mathrm{M}} = 2-5i$.
L'affixe de $\overrightarrow{e_1}$ est $z_{\overrightarrow{e_1}} = 1$. celle de $\overrightarrow{e_2}$ est $z_{\overrightarrow{e_2}} = i$.

Remarques :

- On a ainsi identifié le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct et l'ensemble $\mathbb{C}$, ce qui justifie l'appellation **plan complexe** de ce type de plan.
- Les réels étaient déjà identifiés depuis la seconde à une droite (incluse dans le plan)
- Cette identification justifie que l'on ne peut pas prolonger à $\mathbb{C}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$, car cela reviendrait à comparer deux points du plan, ou deux vecteurs, ce qui n'a pas de sens.
- L'unicité des coordonnées dans le plan implique aussi l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe (même si nous l'avons déjà démontré autrement).
- La droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$ est appelé l'axe réel (ou axe des réels) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des abscisses).
  La droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{e_2}$ est appelé l'axe imaginaire (ou axe des imaginaires) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des ordonnées).

Exercice du Cours : On considère le nombre complexe $z = 3-2i$.
Sans calcul, placer dans le plan complexe les points $\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}\left(\overline{z}\right)$, $\mathrm{C}(-z)$, $\mathrm{D}\left(-\overline{z}\right)$ $\mathrm{E}(2z)$ et $\mathrm{F}(iz)$.

Conjugué et opposé :
Les points associés à deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
Les points associés à deux nombres complexes opposés sont symétriques par rapport à l'origine du repère.



Exercice 1 : Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

1. $\mathrm{Re}(z) = 2$ (en bleu)
2. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ (en rouge)
3. $\mathrm{Re}(z) = 2\mathrm{Im}(z) - 1$ (en vert)
4. $\mathrm{Im}(z) = (\mathrm{Re}(z))^2$ (en noir)

Exercice 2 : Soit $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer et représenter l'ensemble des points $\mathrm{M}(a;b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a + b + i(b^2-1)$ soit :

1. un réel **2.** un imaginaire pur **3.** nul

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 53-54 p 242

I.2. Premiers calculs géométriques

Propriété 1.

Dans le plan complexe, notons z_{A} l'affixe du point A et z_{B} l'affixe du point B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$

Preuve

Il suffit de se ramener aux coordonnées.
Notons $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}; y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}; y_{\mathrm{B}})$ alors $z_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}} + i\,y_{\mathrm{A}}$ et $z_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}} + i\,y_{\mathrm{B}}$.
On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}; y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})$, donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} + i(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})$
D'autre part, $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} + i\,y_{\mathrm{B}} - (x_{\mathrm{A}} + i\,y_{\mathrm{A}}) = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} + i(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})$
Par conséquent l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$

Exemple :

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ avec $\mathrm{A}(3;5)$ et $\mathrm{B}(5;8)$ est donc $z = 2 + 3i$

Propriété 2.

Dans un plan complexe, soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixe respective $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égaux ssi ils ont même affixe.
   Autrement dit, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff z_{\overrightarrow{u}} = z_{\overrightarrow{v}}$.
2. L'affixe du vecteur somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est la somme des affixes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   Autrement dit, $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour affixe le produit du réel λ par l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$.
   Autrement dit, $z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}$.
4. I est le milieu de [AB] $\iff z_{\mathrm{I}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}}{2}$.
5. G est le centre de gravité du triangle ABC $\iff z_{\mathrm{G}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}}{3}$
6. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ amène le point $\mathrm{M}(z)$ sur le point $\mathrm{M}'(z')$ tel que $z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$.

Preuve

Tout se retrouve grâce aux propriétés déjà connues sur les coordonnées

Exemple :

Soient les points $A(-3+i)$, $B(5+7i)$ et $C(4+i)$.
Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe

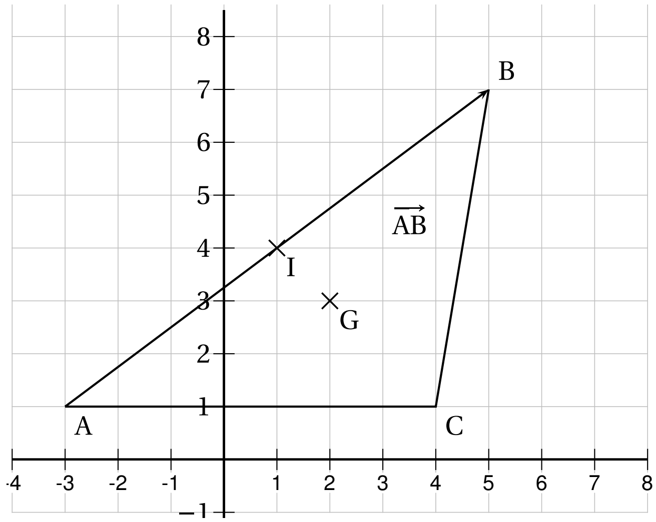
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 8+6i$$

Le milieu I de $[AB]$ est le point d'affixe

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1+4i$$

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'affixe

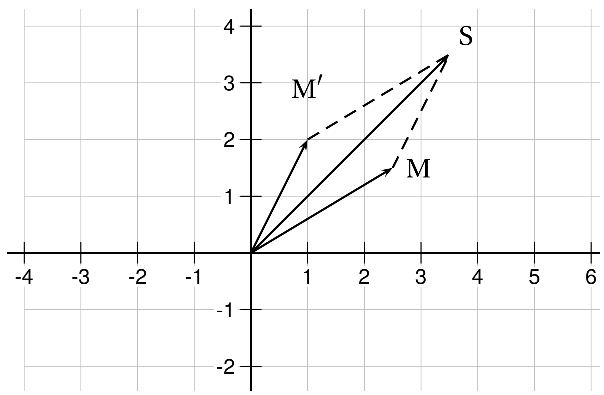
$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 2+3i$$



Remarque : Ces applications permettent de traduire des problèmes géométriques en relations entre nombres complexes.

Exercice du Cours : Soient les points $M(2.5+1.5i)$ et $M'(1+2i)$.
Déterminer l'affixe du point S tel que $OMSM'$ soit un parallélogramme.

Solution **:**
Le point S d'affixe $z_S = z_M + z_{M'} = 3.5+3.5i$ est le point tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.
Ainsi, $OMSM'$ est un parallélogramme.
On peut également raisonner en terme de milieu des diagonales ou d'égalité de vecteur.



Exercice 3 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = 2+\frac{1}{2}i$, $z_C = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_D = -1-\frac{1}{2}i$.

1. Placer les points sur un graphique puis déterminer l'affixe du milieu I du segment $[AC]$.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer l'affixe du point E symétrique de A par rapport à B.

Exercice 4 : La plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

1. Placer **à la règle et au compas** les points A, B et C d'affixes respectives $2-i$; $2i$ et $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. Déterminer les affixes des points A' et B' symétriques de A et B par rapport à O
3. Déterminer l'affixe du symétrique C' de C par rapport à l'axe réel, puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CC'}$

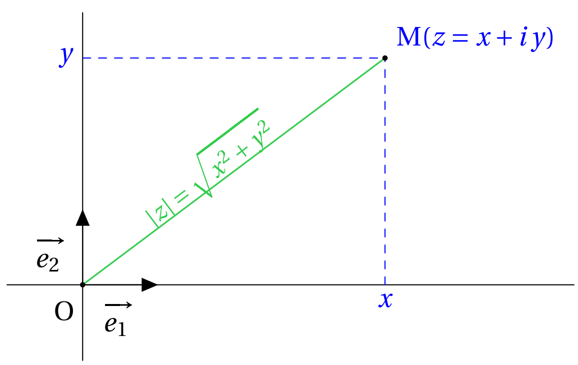
II) Distances et angles orientés

Introduction orale : *Pour repérer un point dans le plan, vous avez depuis la 3e utiliser des coordonnées cartésiennes, ie une abscisse et une ordonnée.*
Cependant, il existe d'autres types de coordonnées.
Par exemple, on peut décrire la position d'un point M *dans un repère* $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ *grâce à sa distance à l'origine* OM *et à l'angle orienté* $\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$. *On parle de* ***coordonnées polaires*** *(qui ne sont pas uniques, contrairement aux cartésiennes, puisque plusieurs angles peuvent convenir pour décrire la position d'un même point).*
Ces coordonnées ont disparu du programme de 1S, mais on va tout de même les toucher du doigt avec le plan complexe. En effet, elles rendent les calculs très simples lors de l'étude de certaines figures géométriques ou de transformations autres que la translation (mais elles aussi disparues du programme).
Ainsi, nous allons définir la notion de module et d'argument d'un nombre complexe, qui renvoit à cette fameuse distance et cet angle orienté ...

II.1. Module d'un nombre complexe

Définition 2. (Proposition)

On considère $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = x + iy$ (donc x et y réels) et M son point associé dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM.
$|z|$ est donc un nombre réel positif ou nul et on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.



Remarques :

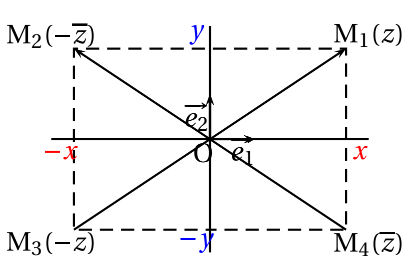
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ alors $z = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$ et $|z|$ représente la distance AB. Ainsi :

$$\mathrm{AB} = ||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|| = |z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}| = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$$

- $|z| \geq 0$ pour tout nombre complexe z et $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- On a $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z| = |-z| = \left|\overline{z}\right| = \left|-\overline{z}\right|$
- Si $z = x + iy$ est réel alors $y = \Im\mathrm{m}(z) = 0$ et on a

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x|$$

Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation, et généralise la valeur absolue d'un nombre réel.



Exemples :

Si $z = 3-4i$, alors $|z| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Si $z = 9i$ alors $|z| = \sqrt{9^2} = 9$.
On donne les points A et B d'affixe respective $z_\mathrm{A} = -1+4i$ et $z_\mathrm{B} = 2-i$. Calculer la distance AB.
Soient $\mathrm{D}(4i)$, $\mathrm{E}(3)$ et $\mathrm{F}(6+8i)$. Quelle est la nature du triangle DEF ?

Propriété 3.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
3. $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Preuve **ROC pour 1-2**

1.

$$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz' \times \overline{z} \times \overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$$

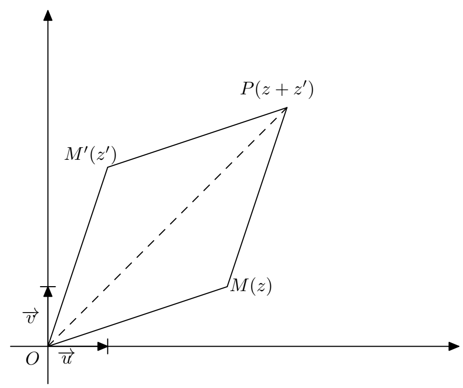
Comme un module est positif on obtient : $|zz'| = |z||z'|$

2.

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z \times \overline{z}}{z' \times \overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

Comme un module est positif on obtient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

3. Pour comprendre l'inégalité triangulaire il suffit d'observer cette figure ci-contre.
On a bien $\mathrm{OP} \leq \mathrm{OM} + \mathrm{OM}'$
et donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$



Démonstration plus rigoureuse :
Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.

Or $$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2$$

Et $$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

Il s'agit donc de comparer $(z\overline{z'} + \overline{z}z')$ et $2|zz'|$.
Or $z\overline{z'} + \overline{z'}z = z\overline{z'} + \overline{\overline{z\overline{z'}}} = 2\Re(z\overline{z'}) \leq 2|zz'|$ d'après la propriété 2. Donc

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$$

Exercice 5 :

1. Pour tout nombre complexe z on pose :

$$\mathrm{P}(z) = z^3 - 3z^3 + 3z + 7$$

   a. Calculer $\mathrm{P}(-1)$.

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$\mathrm{P}(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$z_A = -1$ $\qquad z_B = 2 + i\sqrt{3}$ $\qquad z_C = \overline{z_B}$ $\qquad z_D = 3$

3. **a.** Réaliser une figure.

b. Calculer les distance AB, BC et CA.
En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.

d. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$.

e. En déduire la nature du triangle ADC.

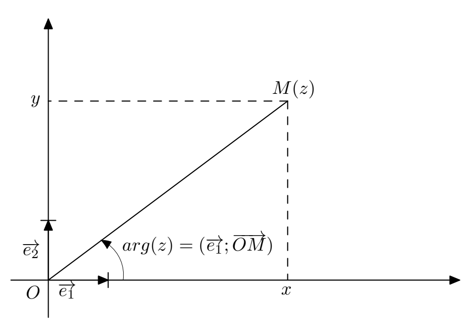
II.2. Argument d'un nombre complexe

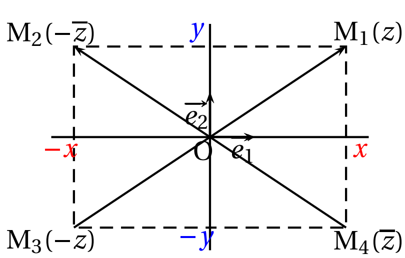
Définition 3.

Soit z un nombre complexe **non nul** associé au point M dans le plan complexe.
On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$ toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Attention !

Le nombre complexe $z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $(\vec{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ ne se définit pas.





Remarques :

⇝ Un nombre complexe possède une infinité d'arguments !
En effet si θ est un argument de z, tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
L'unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'**argument principal**.
On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (se lit « modulo 2π ») pour signifier que $\arg(z)$ peut-être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

⇝ $\forall z \in \mathbb{C}^*$ on a $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$ et $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$

⇝ Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $z = z_B - z_A$.
Par conséquent, $\left(\vec{e_1}; \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

Exemple :

On voit clairement, de part leur position dans le plan complexe, que :

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \arg(1) = 0 \quad [2\pi] \qquad \arg(-1) = \pi \quad [2\pi] \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \arg(i+1) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Mais ce n'est pas toujours aussi simple !

Exercice du Cours :

1. Par lecture graphique, donner le module et l'argument principal des points A(−3), B(2i), C(−i) et D(2 + 2i).

2. A partir de $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$, déterminer sans calcul un argument de $1-i$, $-1-i$ puis $-1+i$.

3. On donne désormais le point E avec les caractériques suivantes :

⇝ E est situé sur le cercle de centre O et de rayon 3.

⇝ L'abscisse de E vaut $\dfrac{3}{2}$

Placer E puis par considération géométrique, déterminer son module et son argument principal.
En déduire son ordonnée puis son affixe.

Remarques :

⇝ Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $\arg(z) = 0 \quad [2\pi]$, si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $\arg(z) = \pi \quad [2\pi]$

⇝ On peut raisonner de même sur les imaginaires purs dont la partie imaginaire est strictement positive ou négative. Par conséquent :

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) = 0 \quad [\pi]$$

$$z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Exercice 6 : Soit A le point situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 d'ordonnée 1.

1. Faire une figure et par considération géométrique, déterminer l'affixe z_A de A.

2. Tracer l'ensemble des points $M(z)$ tels que

a. $\arg(z) = \arg(z_A) \quad [2\pi]$ (en vert)

b. $\arg(z) = \arg(-z_A) \quad [2\pi]$ (en rouge)

c. $\arg(z) = \arg(\overline{z_A}) \quad [2\pi]$ (en noir)

d. $\arg(z) = \arg(iz_A) \quad [2\pi]$ (en bleu)

e. $\arg(z) = \arg(z_A) \quad [\pi]$ (en pointillés verts)

f. $\arg(z) = \arg(z_A) + \arg(\overline{z_A})) \quad [2\pi]$ (en ? ?)

g. $|z| = |2z_A|$

Exercice 7 : Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \iff |z-2-i| = 1$

2. $M \in \mathscr{F} \iff |z| = |\overline{z}-2+i|$

3. $M \in \mathscr{G} \iff \arg(z+2i) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

4. $M \in \mathscr{H} \iff |z-3| = |z-3i|$

5. $M \in \mathscr{K} \iff |\overline{z}-4+i| = 1$

6. $M \in \mathscr{L} \iff \arg(\overline{z}) = \arg(-z)[2\pi]$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 61-62 p 243

III) Deux nouvelles écritures des nombres complexes

III.1. Forme trigonométrique

Théorème 1. (Définition)

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme, dite **trigonométrique**, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ (donc réel) et $\theta \in \mathbb{R}$.
De plus, le réel r est égal au module de z, et les réels θ convenables sont les arguments du complexe z.

Preuve

- Si on connait le module r de z et un argument θ de z, il suffit de faire la somme de deux vecteurs (à illustrer) puis de factoriser.
  Donc z peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $|z|^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \Longleftrightarrow |z| = r$ puisque $r > 0$.
  De plus, si θ' est un argument de z alors, d'après ce qui précède on sait que z peut s'écrire :
  $$z = r(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
  Deux nombres complexes étant égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire on a :
  $$\left\{\begin{array}{l} r\cos\theta = r\cos\theta' \\ r\sin\theta = r\sin\theta' \end{array}\right. \overset{r>0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \theta = \theta' & [2\pi] & \text{ou} & \theta = -\theta' \quad [2\pi] \\ \theta = \theta' & [2\pi] & \text{ou} & \theta = \pi - \theta' \quad [2\pi] \end{array}\right.$$
  Par conséquent les seules solutions du système sont $\theta' = \theta[2\pi]$ et donc θ est un argument de z.

Remarques :

- Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument)
- L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.

Exercice du Cours : Déterminer :

- deux autres formes trigonométriques du nombre $z = 3\left[\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right]$
- une forme trigonométrique et la forme algébrique du nombre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$
- un argument de $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$
- une forme trigonométrique de $z = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$
- une forme trigonométrique et la forme algébrique de $z = -5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

Méthode pour trouver l'argument d'un nombre complexe

Soient $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $z=x+iy$.

- On calcule le module de z.
- On factorise l'écriture de z par $|z|$: $z=|z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right)$
- On reconnait alors la valeur d'un angle remarquable θ (ou d'un angle associé grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique) tel que $\cos\theta=\frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta=\frac{y}{|z|}$

Exemple :

Reprenons l'exemple de $z=1+i$.

On a $|z|=\sqrt{2}$ et $z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Or $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc un argument de z est bien $\frac{\pi}{4}$.

De même, calculer l'argument principal de $z=\sqrt{3}+i$, $z'=-\sqrt{3}+i$ et de leur conjugués.

En déduire leur écriture trigonométrique correspondante.

Remarque : Il arrivera rarement que l'argument ne soit pas une valeur remarquable. Dans ce cas, on utilisera la calculatrice.

Résumé

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ de forme algébrique $z=x+iy$, de module r et d'argument principal θ. Alors :

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ tel que } \quad \cos\theta=\frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{y}{r} \end{cases}$$

Exercice 8 :

1. Déterminer une écriture trigonométrique de $z=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z'=-1+2i$.
3. Placer alors dans le plan complexe les deux points $\mathrm{A}(z)$ et $\mathrm{B}(z')$.

III.2. Conséquences sur l'argument

Propriété 4.

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{Z}$:

1. $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$
2. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$
3. $\arg(z^n)=n\times\arg(z)[2\pi]$

***Preuve* ROC**

1. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$

2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg(z) = \arg(\frac{1}{z} \times z) = \arg(1) = 0\,[2\pi]$, donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$
Alors $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$

3. Montrons déjà par récurrence la propriété sur les entiers naturels. Soit $\mathscr{P} : \arg(z^n) = n \times \arg(z)\,[2\pi]$.
   - Initialisation :
     Si $n = 0$ alors $\arg(z^0) = \arg(1) = 0\,[2\pi]$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est, ie $\arg\left(z^{k+1}\right) = (k+1) \times \arg(z)\,[2\pi]$.

$$\begin{array}{rcll} \arg\left(z^{k+1}\right) & = & \arg(z \times z^k)\,[2\pi] & \\ & = & \arg(z) + \arg(z^k)\,[2\pi] & \text{d'après 4)} \\ & = & \arg(z) + k\arg(z)\,[2\pi] & \text{(HR)} \\ & = & (k+1)\arg(z)\,[2\pi] & \end{array}$$

     Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   - Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin, montrons la propriété $\forall n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, alors

$$\arg(z^n) = \arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) = \arg\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}\right) = -n\arg\left(\frac{1}{z}\right) = n\arg(z)\,[2\pi]$$

Remarques :

- Les formes algébriques sont pratiques pour les additions
- Les formes trigonométriques sont pratiques pour les multiplications :
  - **Pour multiplier** deux nombres complexes *non nuls*, on **multiplie les modules** et on **additionne les arguments**.
  - **Pour diviser** deux nombres complexes *non nuls*, on **divise les modules** et on **soustrait les arguments**

Exemples :

- Déterminer une forme trigonométrique de $z = \frac{1}{1+i}$ et de $z' = (1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$
- Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3} + 2i$ puis de $z' = 3 - 4i$.
  En déduire une forme trigonométrique de zz' et de $\frac{z}{z'}$
- Soit $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. Calculer zz'.

Exercice 9 : Déterminer une forme trigonométrique de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Exercice 10 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. Soit A et B les points d'affixes :
$$z_A = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_B = 3 + i$$
   a. Calculer les affixes des points A$'$ et B$'$, images des points A et B par f.
   b. On suppose que deux points ont la même image par f.
   Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   a. Démontrer que OMIM$'$ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$
   b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$
3. **a.** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$.
   En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$, puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.
   b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M$'$ sur un même cercle que l'on déterminera.
   c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique $z_E + 4$ et à l'aide du $3)(a)$ démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

III.3. Notation Exponentielle

On note f la fonction qui à tout réel θ, associe le nombre complexe $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Pour tous réels θ et θ' on a :

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos\left(\theta+\theta'\right) + i\sin\left(\theta+\theta'\right) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)\times\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right) \qquad \text{car } \arg(z)+\arg(z') = \arg(zz')\ [2\pi] \\ &= f(\theta)\times f(\theta') \end{aligned}$$

Ainsi, f transforme les sommes en produit et on retrouve la même propriété algébrique que pour la fonction exponentielle. Pour cette raison, on adopte la **notation** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, qui s'avèrera fort commode pour les calculs.

Définition 4.

Pour tout réel θ on note :
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Ainsi, tout nombre complexe z non nul, de module r et d'argument θ admet une écriture du type $z = re^{i\theta}$, appelée **forme exponentielle** de z.

Remarques :

- Cette écriture n'est pas unique puisqu'elle dépend de l'argument choisi.
- Il s'agit d'une notation, pas du calcul de $e^{i\theta}$ ...
- Remarquons que cette écriture présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique.
  En effet, considérons deux nombres complexes z et z' de module r et r' et d'argument θ et θ', alors on a vu que le module de zz' est rr' et l'argument de zz' est $\theta+\theta'$. Observons le calcul suivant :
$$zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta+i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$
  On retrouve donc le module et l'argument du nombre complexe zz' en utilisant les règles de calculs sur les puissances.

Exemples :

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2} = -i$$

Dans le plan complexe, placer les points suivants :

$$\mathrm{A}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad \mathrm{B}\left(-2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad \mathrm{C}\left(e^{-5i\frac{\pi}{6}}\right) \quad \mathrm{D}\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$

Remarque : Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos\theta + i\sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Propriété 5.

$\forall\theta$ et θ' de $\mathbb{R}$ on a :

$$e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour tout } n\in\mathbb{Z}$$

Preuve

Simple transcription des propriétés vues sur les arguments.

Exercice du Cours :

- Soient $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$, donner une forme exponentielle de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$
- On note $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.
  En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{z_1^4}{z_2^3}$
- Calculer $(1+i)^{14}$
- Déterminer le module de $z = e^{i\theta}$ et puis $z = -3e^{i\theta}$
- Déterminer la forme algébrique de $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ainsi que le module et un argument de $-z$.

Enigme [(a)] : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & e^{i2\pi} = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & \left(e^{i2\pi}\right)^x = 1^x = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & e^{i2\pi x} = 1 \end{aligned}$$

pour $x = \dfrac{1}{4}$ on obtient : $e^{i\frac{\pi}{2}} = 1$

d'où : $i = 1$

Exercice 11 : Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants : $z_1 = -\sqrt{3}+i$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}\times z_1^2$

(a). Réponse : La relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ n'est valable que si $n\in\mathbb{Z}$

Exercice 12 : Dans le plan complexe, placer les points $A\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$, $B\left(-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$, $C(-z_A \times z_B)$ et $D\left(-\frac{z_B}{z_A}\right)$

Exercice 13 : Déterminer les formes algébriques de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. $z_2 = 2 - i + 3e^{i\pi}$
3. $z_3 = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 14 : Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \qquad z_2 = 2 - 2i \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
   Les écrire alors sous forme exponentielle.

   b. En déduire le module et l'argument de Z.

   c. Déterminer les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.
3. Dans le plan complexe d'unité graphique 2 cm, placer dans l'ordre les points $B(z_2)$, $A(z_1)$ et $C(Z)$ à la règle et au compas.
4. Ecrire sous forme algébrique le nombre Z^{2014}.

Exercice 15 : On considère le nombre complexe $z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique
2. Déterminer le module et un argument de z^2
3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z.
4. Déduire de ce qui précède $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ puis $\cos\frac{\pi}{12}$ puis $\sin\frac{\pi}{12}$
5. Comparer avec les valeurs trouvées à l'exercice précédent.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 67-71-**76-84** p 244

IV) Applications géométriques

IV.1. Distance

Travail de l'élève 1 : Notons que si $a = x_A + i\,y_A$ et $b = x_B + i\,y_B$ sont les affixes respectives de deux points A et B alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |\,b - a\,|$$

Utilisons cela pour déterminer des lieux géométriques, ie des lieux où un point M, d'affixe z satisfaisant à une condition initiale, se situe.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$|z - 3 + 4i| = 5$$

Pour cela, considérer le point $B(3 - 4i)$ *et traduire l'égalité en termes géométriques.*

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$|\,z - 2 - 6i\,| = |\,z + 1 + i\,|$$

Pour cela, considérer deux points A et B d'affixes judiscieusement choisies puis interpréter l'égalité.

Caractérisation des cercles et des médiatrices

⇝ Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R.

$$M(z) \in \mathscr{C} \iff \Omega M = R \iff |z - \omega| = R$$

⇝ Soit Δ la médiatrice d'un segment [AB] avec $A(a)$ et $B(b)$.

$$M(z) \in \Delta \iff MA = MB \iff |z - a| = |z - b|$$

Exercice du Cours :

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|\,z - 3i\,| = 2$$

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|\,z - 2\,| = |\,2z + i\,|$$

Solution :

1. En considérant le point C d'affixe $z_C = 3i$ on obtient :

$$|\,z - 3i\,| = 2 \iff |\,z - z_C\,| = 2 \iff CM = 2$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre C et de rayon 2.

2. En considérant les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -\dfrac{i}{2}$ on obtient :

$$|\,z - 2\,| = |\,2z + i\,| \iff |\,z - 2\,| = |\,2\,(z - z_B)\,| \iff |\,z - z_A\,| = 2\,|\,z - z_B\,| \iff MA = 2MB$$

Pour conclure on utilisera la méthode générale rappelée ci-après.

IV.2. Angles

Travail de l'élève 2 : Rappelons que si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B alors :

$$\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right)=\arg(z_A-z_B)\quad[2\pi]$$

Utilisons cela pour déterminer des propriétés géométriques.

1. Sur un exemple : on donne $A(1)$ et $B(2,i\sqrt{3})$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(e_1;\overrightarrow{AB}\right)$.
2. En général :
   a. Démontrer que pour tous points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ du plan complexe, deux à deux distincts on a :
   $$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\quad[2\pi]$$
   b. En déduire une condition nécéssaire et suffisante sur a, b, c et d pour que $(AB)\perp(CD)$
   c. En déduire une condition nécéssaire et suffisante sur a, b, c et d pour que $(AB)//(CD)$
   d. En déduire une condition nécéssaire et suffisante sur a, b et c pour que A, B et C soient alignés
3. Application :
   On donne $A(5+3i)$ et $B(5-8i)$. Le triangle OAB est-il rectangle en O ?

Propriété 6.

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b, c et d. Alors :

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right|=\frac{CD}{AB}\qquad\text{et}\qquad\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\quad[2\pi]$$

Preuve

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right|=\frac{|d-c|}{|b-a|}=\frac{CD}{AB}.$$

$$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)=\arg(d-c)-\arg(b-a)=\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{CD}\right)-\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{e_1}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$$

Conséquences

Avec les mêmes notations et (A, B et C distincts) :

Les points A, B et C sont alignés $\iff \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=0\,[\pi] \iff \frac{b-c}{a-c}\in\mathbb{R}$

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)=\frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{d-c}{b-a}\in i\mathbb{R}$

Exercice du Cours : Soit z un nombre complexe différent de 1 et M son point image dans le plan complexe. On pose $Z=\frac{z+i}{z-1}$. Déterminer l'ensemble :

- $\mathscr{E}$ des points M tel que $Z\in\mathbb{R}$.
- $\mathscr{F}$ des points M tel que $|Z|=1$.
- $\mathscr{G}$ des points M tel que $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Proposition 1.

Dans le plan complexe, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r et un point M d'affixe z. Alors :

$$\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C} \iff z = \omega + re^{i\theta} \qquad \text{avec} \quad \theta \in [0; 2\pi[$$

Preuve

On sait que $\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C} \iff \mathrm{M}\Omega = r \iff |z - \omega| = r$.

On appelle θ une mesure de $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right)$. Alors $\theta = \arg(z - \omega)$ et donc :

$$\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C} \iff z - \omega = re^{i\theta} \iff z = \omega + re^{i\theta}$$

Remarque : Cette égalité est appelée équation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

L'ensemble des points d'affixes $z = 4i + 2 + 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ représente le cercle de centre $\Omega(4i + 2)$ et de rayon 3.

Exercice 16 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1$ et $z_{\mathrm{B}} = -i$.
On appelle C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral direct, ie tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = +\dfrac{\pi}{3}$.
Placer le point C à la règle et au compas, puis déterminer son affixe exacte par le calcul.

Exercice 17 : On considère les points A, B, C, D, S et T d'affixes respectives :

$$a = -2 + 4i \qquad b = -4 + 2i \qquad c = 4 + 2i \qquad d = -2 + 2i + 6e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad s = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad t = -2 + 2i$$

1. Placer ces points et compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Pour chacune des questions suivantes, expliquer la méthode pour y répondre (mais il est inutile d'y répondre)
   a. Montrer que les points A, B C et D sont cocycliques.
   b. Montrer que la droite (ST) est la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$
   c. On considère les points P et Q, milieux respectifs des segments $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$.
   Déterminer p et q les affixes respectives des points P et Q.
3. On a calculé $\dfrac{t-p}{q-s} = -\dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{d-c}{b-a} = 3$ Que peut-on en déduire ?
4. Que représente le point T pour le triangle PQS ? Le démontrer. *On donne $p = 1 + 3i$ et $t = -3 - i$.*
5. Déterminer l'affixe r du point R tel que ABSR soit un parallélogramme.

Exercice 18 : Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre choix.
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct.

1. Soit z une nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. **Proposition :** z^{100} est un nombre réel
2. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z| = |1 - z|$.
   Proposition : $\mathscr{F}$ est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. On considère l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe $z = 1 - 2e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; \pi]$
   Proposition : $\mathscr{G}$ est inclus dans un cercle de rayon 2.

4. Avec les mêmes notations qu'au 3. **Proposition :** Le point $\mathrm{A}(1+2i)$ est un point de $\mathscr{G}$

5. On donne l'équation (E) suivante : $z^2 - 2z\cos\dfrac{\pi}{7} + 1 = 0$
   Proposition : (E) admet deux solutions complexes de modules égaux à 1.

Exercice 19 : On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{I}} = 1$, $a = 2i$ et $b = 3+i$.

1. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
2. Calculer l'affixe c du point C image de A par la symétrie de centre I.
3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{c-b}{a-b}$
   En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.
4. Soit D le point d'affixe d telle que $d - c = a - b$, montrer que ABCD est un carré.
5. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}}$
   a. Exprimer $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$
   b. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $||\vec{u}|| = 2||\overrightarrow{\mathrm{AB}}||$.
   Construire Γ.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° **77**-80-81-**85-86**-87**88-89-93**-94 p 245

IV.3. Mémo sur les triangles

ABC est un isocèle de sommet principal A si et seulement si AB = AC donc :

Propriété 7. (Triangle Isocèle)

ABC est isocèle de sommet principal A $\Longleftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \Longleftrightarrow \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

Pour les triangles équilatéraux, on peut évidemment procéder comme ci-dessus pour l'égalité de 3 côtés. Mais voyons plutôt une autre caractérisation que l'on retrouve parfois dans les exercices de bac et qu'il faut savoir reconnaître.

ABC est un équilatéral si et seulement si il est isocèle avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ donc :

Propriété 8. (Triangle équilatéral)

ABC est équilatéral de sommet principal A $\Longleftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$

Pour les triangles rectangle, on peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2$$

ou travailler sur l'angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) = -arg(z_{\overrightarrow{AB}}) + arg(z_{\overrightarrow{AC}}) = arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

Propriété 9.

ABC est rectangle en A $\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \Longleftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

IV.4. Mémo : Lieux de points typiques

On cherche le lieu géométrique des points $\mathrm{M}(z)$ tels que :

1. $|z - z_1| = k$, avec $k \in \mathbb{R}$:

⇝ On pose $\mathrm{A}(z_1)$ et dans ce cas : $|z - z_1| = k \iff \mathrm{AM} = k$.

⇝ Donc, les points M cherchés sont tous ceux situés à une distance k du pont A.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ cherché est :

- Si $k > 0$: **le cercle de centre** A **et de rayon** k
- Si $k = 0$: le point A
- Si $k < 0$: l'ensemble vide

2. $|z - z_1| = |z - z_2|$:

⇝ On pose $\mathrm{A}(z_1)$ et $\mathrm{B}(z_2)$ et dans ce cas $|z - z_1| = |z - z_2| \iff \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

⇝ Donc les points M cherchés sont tous ceux situés à égale distance de A et B.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ cherché est **la médiatrice du segment** $[\mathrm{AB}]$

3. $\arg\left(\dfrac{z - z_2}{z - z_1}\right) = \pi \quad [2\pi]$.

⇝ On pose $\mathrm{A}(z_1)$ et $\mathrm{B}(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z - z_2}{z - z_1}\right) = 0 \quad [2\pi] &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = \pi \quad [2\pi] \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \pi \quad [2\pi] \end{aligned}$$

⇝ Donc les points A, M, B sont alignés dans cet ordre.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ cherché est **le segment** $[\mathrm{AB}]$ **privé de** A **et** B**.**
on enlève les points A *et* B*, car sinon l'argument n'est pas défini*

4. $\arg\left(\dfrac{z - z_2}{z - z_1}\right) = 0 \quad [2\pi]$.

⇝ On pose $\mathrm{A}(z_1)$ et $\mathrm{B}(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z - z_2}{z - z_1}\right) = 0 \quad [2\pi] &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = 0 \quad [2\pi] \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \quad [2\pi] \end{aligned}$$

⇝ Donc les points M, A, B sont alignés dans cet ordre. ou dans l'ordre A, B, M.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ cherché est **la droite** (AB) **privée du segment** $[\mathrm{AB}]$**.**

5. $\arg\left(\dfrac{z - z_2}{z - z_1}\right) = 0 \quad [\pi]$.

⇝ On pose $\mathrm{A}(z_1)$ et $\mathrm{B}(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z - z_2}{z - z_1}\right) = 0 \quad [\pi] &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = 0 \quad [\pi] \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \quad [\pi] \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \pi \quad [2\pi] \end{aligned}$$

⇝ Donc les points M, A, B sont alignés (peu importe l'ordre).

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ cherché est **la droite** (AB) **privée de** A **et** B**.**
On enlève les points A *et* B*, car sinon l'argument n'est pas défini*

6. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$.

$\rightsquigarrow$ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pm\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Donc le triangle MAB est rectangle en M (de sens direct ou indirect).

$\rightsquigarrow$ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le cercle de diamètre** [AB] **privé des points** A **et** B**.**
On enlève les points A *et* B*, car sinon l'argument n'est pas défini*

7. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

$\rightsquigarrow$ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Donc le triangle MAB est rectangle en M de sens direct.

$\rightsquigarrow$ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le demi-cercle de diamètre** [AB] **privé des points** A **et** B **et tel que** MAB **soit direct.**
On enlève les points A *et* B*, car sinon l'argument n'est pas défini*

8. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

$\rightsquigarrow$ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Donc le triangle MAB est rectangle en M de sens indirect.

$\rightsquigarrow$ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le demi-cercle de diamètre** [AB] **privé des points** A **et** B **et tel que** MAB **soit indirect.**
On enlève les points A *et* B*, car sinon l'argument n'est pas défini*

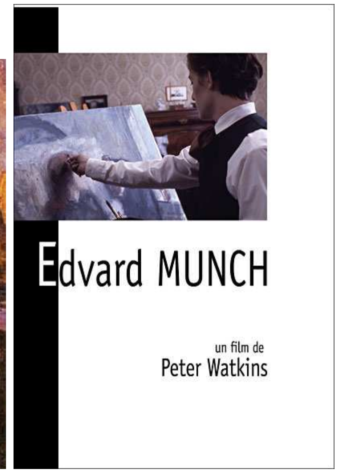
9. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, avec A et B deux points du plan complexe.

$\rightsquigarrow$ Les points M cherchés sont ceux tels que le triangle MAB soit rectangle en M (direct ou indiret)

$\rightsquigarrow$ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le cercle de diamètre** [AB] .

« " J'étais en train de marcher le long de la route avec deux amis - le soleil se couchait - soudain le ciel devint rouge sang – j'ai fait une pause, me sentant épuisé, et me suis appuyé contre la grille - il y avait du sang et des langues de feu au-dessus du fjord bleu-noir et de la ville - mes amis ont continué à marcher, et je suis resté là tremblant d'anxiété - et j'ai entendu un cri infini déchirer la Nature" »

MUNCH, Edvard



Edvard Munch - Das kranke Mädchen [The Sick Girl]
© Munch Museum/Munch-Ellingsen Group, BONO, Oslo/DACS, London 2004

Dans l'ordre :

- ⇝ *Le cri* (1893)
- ⇝ *L'enfant malade* (1885-86)
- ⇝ *?*
- ⇝ *Film de Peter Watkins* (1973)
- ⇝ *Le vampire* (1893-95)

Annexe : Construction du corps des nombres complexes (Hors programme)

Faute d'outils plus rigoureux [(b)] on vous a présenté l'ensemble des nombres réels comme étant les abscisses des points d'une droite graduée. Additionner et multiplier des réels, c'est donc comme « compter en dimension 1 ».
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et leurs opérations usuelles associées, addition et multiplication sans trop vous poser de questions. Mais elles vérifient les propriétés particulières suivantes : [(c)] :
Pour tous réels x, y et z :

- ⇝ L'addition est associative : $x+y+z=(x+y)+z=x+(y+z)$ et commutative $x+y=y+x$
- ⇝ L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$
- ⇝ La somme de deux réels est encore un réel.
- ⇝ Chaque élément x admet un opposé noté $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$
- ⇝ La multiplication est associative
- ⇝ La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- ⇝ Le produit de deux réels est encore un réel.
- ⇝ Chaque réel $x\neq 0$ admet un inverse noté x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- ⇝ La multiplication est distributive sur l'addition $x(y+z)=x\times y+x\times z$

Tout ceci est bien naturel et bien pratique pour compter. Maintenant, on voudrait faire le même travail en dimension 2 i.e pouvoir calculer avec des couples de nombres du style $(x;y)$.

On note l'ensemble de ces couples $\mathbb{R}^2$, et on souhaite définir des opérations de manière à faire de $\mathbb{R}^2$ un corps. On définit alors l'addition comme suit :

$$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$$

On vérifie aisément que cette opération est associative, commutative, admet un élément neutre $(0;0)$, la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et tout élément $(x;y)$ admet un opposé $(-x;-y)$.

Définissons maintenant la multiplication ! On a envie de la définir de la manière suivante :

$$(x,y)\times(x';y')=(xx';yy') \qquad \text{avec } (1;1) \text{ comme élément neutre}$$

<u>Problème :</u> L'inverse de $(x;y)$ est $\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$ ce qui veut dire tous les couples du type $(x;0)$ avec $x\neq 0$ n'admettent pas d'inverse. Or on voudrait que seul le couple $(0;0)$ n'admettent pas d'inverse. Il faut donc changer de définition…

On décide d'adopter la définition suivante, moins naturelle :

$$(x;y)\times(x';y')=(xx'-yy';xy'+x'y)$$

On vérifie aisément que cette opération est associative, admet un élément neutre $(1;0)$, le produit de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et tout élément $(x;y)\neq(0;0)$ admet un inverse. Nous voici donc avec un nouveau corps.

Il est temps d'établir le lien entre $\sqrt{-1}$ et $\mathbb{R}^2$ tel qu'on l'a construit. On remarque que :

$$(0;1)^2=(0;1)\times(0;1)=(0-1;0+0)=(-1;0)$$

(b). Vous les verrez peut-être un jour…En général on définit un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

(c). Lorsque un ensemble possède ces propriétés et quelques autres, on dit que c'est un corps. Certains de vos parents ont étudié la notion de corps en classe de $4^{ème}$, cette étude se fait désormais après le lycée… $\mathbb{Q}$ est aussi un corps mais ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}$ ni de $\mathbb{N}$ (pas d'inverse pour la multiplication)

$(0,1)$ est alors le nombre que l'on a noté i, et $(-1;0)$ c'est -1, et on a alors $i^2 = -1$.

Pour mieux comprendre, imaginons l'ensemble des réels comme une droite graduée (ici représenté par l'axe des abscisses), ajoutons-y un axe des ordonnées pour passer en dimension 2, alors le réel -1 est associé au point de coordonnées $(-1;0)$, et le nombre dont la racine carré est -1 est lui associé au point de coordonnée $(1;0)$. Nous notons $i = \sqrt{-1}$ pour qu'il fasse moins peur. On remarque qu'en particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. La multiplication n'était pas naturelle dans $\mathbb{R}^2$, mais observez comme les calculs deviennent faciles dans $\mathbb{C}$ (pourtant équivalent) avec la règle $i^2 = -1$ et en prolongeant les règles de de calcul $\mathbb{R}$.

$$(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$$

comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$.
Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$ mais n'oubliez pas que $i^2 = -1$. Alors

$$(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$$

comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$, mais en plus simple.

Dans ce chapitre, nous avons découvert ces nouveaux nombres et associer à chacun de ces nombres un point du plan, donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$. Tout ceci nous permet de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul, ce que nous approfondiront dans un deuxième chapitre...