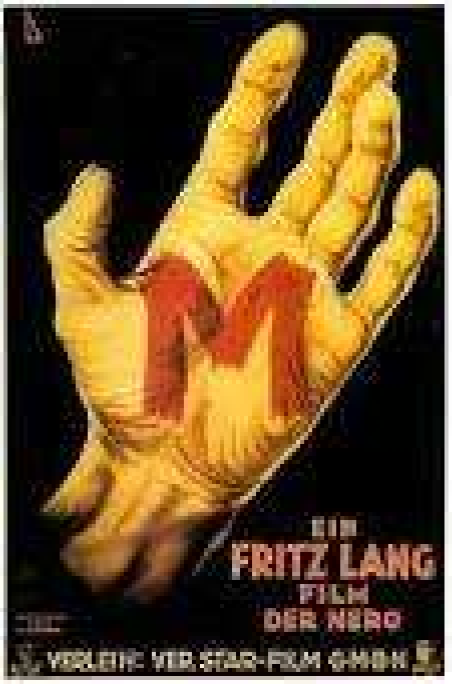
Chapitre 7

Mélangeons la trigo et les fonctions !



Hors Sujet

Titre : « M le maudit »
Auteur : Fritz Lang
Présentation succinte : Il s'agit du premier film parlant de Fritz Lang. Avec le temps, M le maudit est devenu un classique reconnu, rivalisant avec les autres œuvres de Lang pour le titre d'opus magnum. Pendant des années après la sortie du film, Peter Lorre est resté catalogué comme un méchant pour y avoir été un meurtrier d'enfant (et, c'est sous-entendu, un pédophile). M le maudit a été aussi un pionnier dans l'utilisation du leitmotiv (Dans l'antre du roi de la montagne, extrait de Peer Gynt d'Edvard Grieg) pour donner plus d'intensité à l'accompagnement musical.
La ville où se déroule l'action n'est pas nommée, et on pourrait croire qu'il s'agit de Düsseldorf, d'après les titres en italien et espagnol M, le monstre de Düsseldorf. Pourtant, Fritz Lang décide de faire se dérouler le film à Berlin. Plusieurs indices dans le film permettent au spectateur de comprendre qu'ils sont à Berlin : une publicité pour un journal berlinois, la carte de Berlin dans le bureau du commissaire, le fait que le commissaire parle d'une ville de 4 millions d'habitants...
Claude Beylie décrit « M » comme « [. . .] un magistral exercice de style, un modèle absolu de mise en scène, considérée comme une mise en équation de tous les éléments constitutifs du film. Le moindre détail est chargé de sens, les plans s'imbriquent selon un ordre infaillible. »

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- $\rightsquigarrow$ Revoir les fonctions dérivées et leurs applications
- $\rightsquigarrow$ Découvrir de nouvelles formules
- $\rightsquigarrow$ Etudier les variations d'une fonction
- $\rightsquigarrow$ Découvrir deux nouvelles fonctions de référence

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 7 : MÉLANGEONS LA TRIGO ET LES FONCTIONS !

Résumé

Vous avez manipulé les fonctions trigonométriques sans vous en rendre compte, il est temps de formaliser tout cela !
Ainsi ce chapitre reprend ce que vous connaissez déjà, mais avec le vocabulaire adpaté aux fonctions. De plus, vous allez apprendre à dériver les fonctions trigo.

I) Rappels et vocabulaire

I.1. Définition et formules

Travail de l'élève 1 : *On utilise le logiciel Géogébra. La figure peut être vidéo-projetée*

1. **Figure de base**
   - **a.** Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O;I;J)$.
   - **b.** Choisir le radian comme unité d'angle dans « Options ».
   - **c.** Tracer le cercle trigonométrique de centre O.
   - **d.** Créer un curseur t, variant entre -5π et 5π.
   - **e.** On veut placer un point M associé au réel t sur le cercle.
     Pour cela, dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1; t)$

     Remarque : Attention, le point-virgule est essentiel ! En effet, le couple $(1; t)$ ne désigne pas pour Géogébra les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O;I;J)$, mais lui indique que M sera à une distance 1 de l'origine O du repère (donc il sera bien sur le cercle), et tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = t$ radians. On parle de coordonnées **polaires**.
   - **f.** Créer en ligne de commande le point C de coordonnées $(x_M, 0)$ et le point S de coordonnées $(0, y_M)$
2. **Variations**
   - **a.** Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O;I;J)$? Son ordonnée ?
   - **b.** Avec le curseur, déplacer le point M.
     Décrire son trajet, ainsi que ceux de C et de S correspondants.
   - **c.** En déduire les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[-5\pi; 5\pi]$.
     On précisera les valeurs où ces fonctions s'annulent.

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

3. Courbes représentatives

a. Compléter la figure précédente en créant les points R et Q de coordonnées respectives (t, x_M) et (t, y_M).

b. Faire afficher leurs traces. Quelles courbes représentatives voient-on se dessiner ?

c. Vérifier la cohérence entre les courbes obtenus et vos tableaux.

4. Propriétés

a. Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?

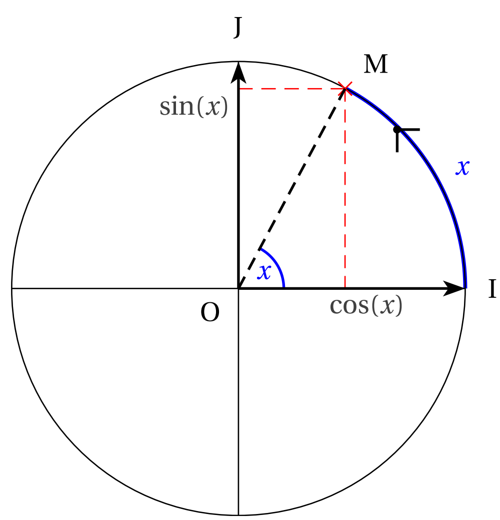
b. Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ? Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

c. Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ? Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique (orienté, de rayon 1 avec une origine).

Définition 1.

La fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de son point associé M sur le cercle trigonométrique est la fonction **cosinus**, notée cos. Ainsi $x \longmapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de son point associé M sur le cercle trigonométrique est la fonction **sinus**, notée sin. Ainsi $x \longmapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction qui à tout réel x, tel que $\cos x \neq 0$, associe le nombre $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est la fonction **tangente**, notée tan. Ainsi $x \longmapsto \tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Propriété 1. (Rappels)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x + 2\pi \times k) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi \times k) = \sin(x) \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Valeurs remarquables :

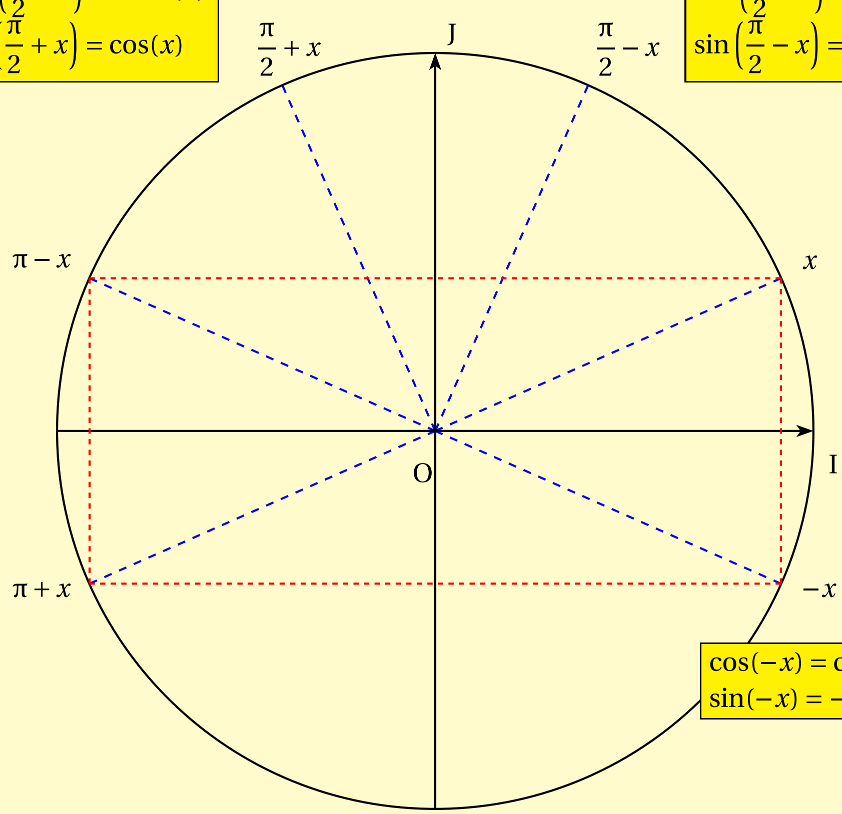
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas	0

Configuration du rectangle

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

Pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Remarque : La configuration du rectangle appliquée aux deux dernières propriétés nous permet de retrouver les formules suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

I.2. Vocabulaire et interprétation graphique

Définition 2. (Propriété)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et T un nombre réel.
Lorsque pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ on a $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$, on dit que f est **périodique de période** T ou encore $\mathrm{T}-$périodiques.
Ainsi, les fonctions cosinus, sinus et tangente sont $2\pi-$**périodiques**.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction périodique, de période T sur l'intervalle $[0;\mathrm{T}]$ est la même que sur tout intervalle du type $[k\mathrm{T};(k+1)\mathrm{T}]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Grâce à cette propriété, il suffira d'étudier les fonctions cos et sin sur un intervalle de taille 2π de notre choix, par exemple $[0;2\pi[$ ou encore $]-\pi;\pi]$, et déduire le reste par translation.

Définition 3. (Propriété)

Soit f une fonction définie sur D_f symétrique par rapport à 0 (ie si $x \in \mathrm{D}_f$ alors $-x \in \mathrm{D}_f$ aussi).
Lorsque pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ on a :

- $f(-x) = f(x)$ on dit que f est une fonction **paire**.
- $f(-x) = -f(x)$ on dit que f est une fonction **impaire**.

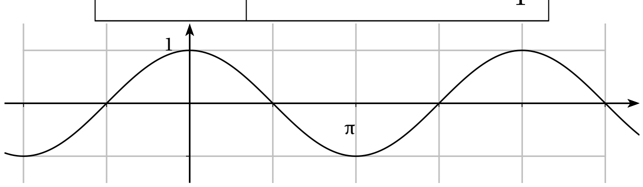
Ainsi la fonction **cos est paire**, tandis que les fonctions **sin et tan sont impaires**.

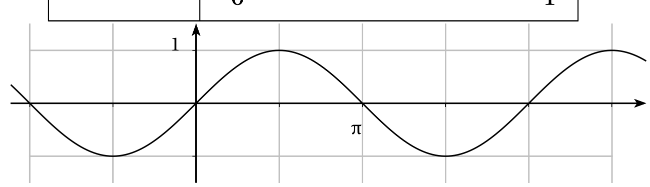
Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Grâce à cette propriété, on peut limiter l'étude des fonctions cos et sin à un intervalle de longueur π, par exemple $[0;\pi]$, et déduire le reste par symétrie.
- On rappelle que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0





II) Dérivées

II.1. Nombre dérivé en 0

Travail de l'élève 2 : L'objectif de cette activité est de montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0 et que l'on a :

$$\sin'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos'(0) = 0$$

1. Traduire l'objectif de l'activité en termes de limite de taux de variation.
2. Montrons que la fonction sin est dérivable en 0 et que $\sin'(0) = 1$.
   On munit le cercle trigonométrique d'un repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
   On considère un réel $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on appelle M son point associé sur le cercle trigonométrique et N le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle en I.
   a. Faire un schéma de la situation.
   b. Montrer que $\mathrm{IN} = \tan h$
   c. En rangeant dans l'ordre croissant les aires des triangles OIM, OIN et celle du secteur de disque OIM, montrer que pour tout $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :
   $$\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$$
   d. En déduire que pour tout $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :
   $$\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1 \qquad (\star)$$
   e. On montre de même que $(\star)$ est vrai pour tout $h \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.
   Conclure.
3. Montrons que la fonction cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$
   a. Montrer que pour tout $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a :
   $$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\sin h}{h} \times \frac{-\sin h}{\cos h + 1}$$
   b. Conclure.

Propriété 2.

On retiendra les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

Preuve

- cf Activité

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-1}{\sin x}$ $\qquad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\cos x}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \sin x}{x \sin x}$

Exercice 2 : Calculer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(x)+x}{x} \qquad g : x \longmapsto \frac{x^2+2\sin(x)}{3x} \qquad h : x \longmapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

Exercice 3 :

1. En utilisant la définition du nombre dérivé , rappeler les limites suivantes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$
2. En utilisant le changement de variable $h = x-\frac{\pi}{2}$, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4 : En utilisant des changements de variables, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{5x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

II.2. Dérivées des fonctions trigo

Travail de l'élève 3 : L'objectif de cette activité est de démontrer que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et de déterminer leur fonction dérivée.
Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Exprimer le taux de variation $\tau(a,h)$ de la fonction sin en a.
2. En utilisant le fait que pour tous réels a, b on a $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$, démontrer que
$$\tau(a,h) = \sin a \times \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}$$
3. En déduire que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
4. En utilisant le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, démontrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

Théorème 1.

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc continues sur $\mathbb{R}$ aussi) et pour tout réel x on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Preuve

- cf Activité

Remarque : On retrouve donc le fait que ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, ainsi que leur tableau de variations grâce au signe de leur dérivée, et enfin on retrouve les deux limites de la partie précédente.

Exercice 5 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto x^2\cos(x)$ $\quad g : x \longmapsto (x^3+2x^2+1)\sin(x)$ $\quad h : x \longmapsto \sqrt{x}\sin(3x+2)$ $\quad k : x \longmapsto \sqrt{3x+1}\cos(4x-7)$

Exercice 6 : Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer l'expression de sa fonction dérivée.

$f : x \longmapsto \left(\sin(x)+\frac{3}{4}x-1\right)^4$ $\quad f : x \longmapsto \frac{1}{(1+2x)^2}$ $\quad f : x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{2}-1}$ $\quad f : x \longmapsto \cos\left(2\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 7 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(ax+b)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
La courbe représentative de f coupe l'axe des ordonnées en $A(0;1)$.
La tangente à cette courbe en A a pour équation $y=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}$
Calculer a et b.

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

1. Montrer que f est périodique de période π.
2. f est-elle paire ? impaire ?
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifier.
2. la fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f. Vérifier graphiquement.

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cos(x)$.
Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse sur le sujet, et **justifier** sur votre copie.

1. La dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=$

   a. $\sin(x)$ **b.** $\cos(x)$ **c.** $\cos(x)+x\sin(x)$ **d.** $\cos(x)-x\sin(x)$

2. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[-2\pi;2\pi]$ est :

   a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

3. $f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=$

   a. $\frac{5\pi}{12}$ **b.** $\frac{5\sqrt{2}\pi}{12}$ **c.** $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ **d.** Autre valeur

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^2$

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** n'existe pas **d.** Autre réponse

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   a. $=0$ **b.** $=+\infty$ **c.** n'existe pas **d.** Autre réponse

6. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à :

   a. l'origine **b.** l'axe des ordonnées **c.** l'axe des abscisses **d.** la droite d'équation $y=x$

7. La fonction f est :

   a. paire **b.** impaire **c.** 2π- périodique **d.** Autre réponse

Exercice 11 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$
3. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en conclure ?
   b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4. A l'aide du cercle trigonométrique, étudier le signe de $1+2\cos x$ sur $[0;\pi]$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;0]$ et enfin sur $[-3\pi;3\pi]$.

III) Etude de la fonction tangente

Travail de l'élève 4 : Pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, on rappelle que l'on définit la fonction tangente par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction tan
2. Montrer que la fonction tan est $\pi-$périodique. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Montrer que la fonction tan est impaire. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Proposer alors un intervalle minimal I pour étudier la fonction tan.
5. On se place sur cet intervalle I.
   Justifier que la fonction tan est dérivable sur I et que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a :
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$
6. En déduire les variations de la fonction tan sur I.
7. Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de I. Interpréter graphiquement.
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction tan en 0.

9. Calculer $\tan\frac{\pi}{4}$.

10. En utilisant les données précédentes, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction tan sur $]-2\pi;2\pi[$.

Exercice(s) du livre : n° 45 + 47 + 59 + 60 p 105 (dérivées et limites)
n° 53 p 108 (étude de fonctions, tangente)
n° 71 p 111 (TVI avec trigo)