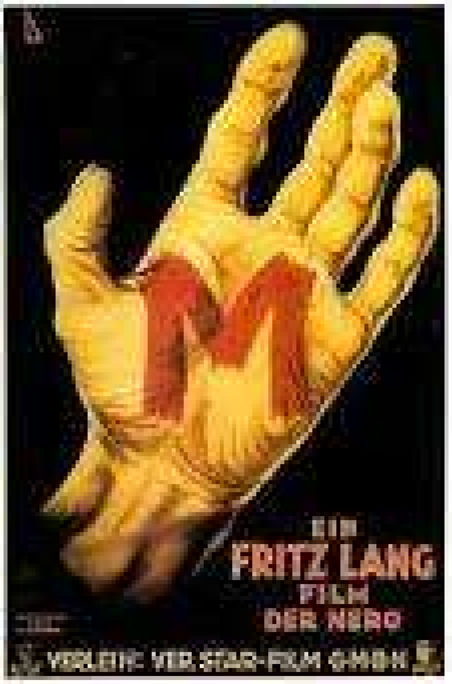
CHAPITRE 5

REPARTONS Á LA DÉRIVE !



HORS SUJET

TITRE : « M le maudit »
AUTEUR : FRITZ LANG
PRÉSENTATION SUCCINTE : Il s'agit du premier film parlant de Fritz Lang. Avec le temps, M le maudit est devenu un classique reconnu, rivalisant avec les autres œuvres de Lang pour le titre d'opus magnum. Pendant des années après la sortie du film, Peter Lorre est resté catalogué comme un méchant pour y avoir été un meurtrier d'enfant (et, c'est sous-entendu, un pédophile). M le maudit a été aussi un pionnier dans l'utilisation du leitmotiv (Dans l'antre du roi de la montagne, extrait de Peer Gynt d'Edvard Grieg) pour donner plus d'intensité à l'accompagnement musical.
La ville où se déroule l'action n'est pas nommée, et on pourrait croire qu'il s'agit de Düsseldorf, d'après les titres en italien et espagnol M, le monstre de Düsseldorf. Pourtant, Fritz Lang décide de faire se dérouler le film à Berlin. Plusieurs indices dans le film permettent au spectateur de comprendre qu'ils sont à Berlin : une publicité pour un journal berlinois, la carte de Berlin dans le bureau du commissaire, le fait que le commissaire parle d'une ville de 4 millions d'habitants...
Claude Beylie décrit « M » comme « [...] un magistral exercice de style, un modèle absolu de mise en scène, considérée comme une mise en équation de tous les éléments constitutifs du film. Le moindre détail est chargé de sens, les plans s'imbriquent selon un ordre infaillible. »

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Revoir les fonctions dérivées et leurs applications
- ⇝ Découvrir de nouvelles formules
- ⇝ Etudier les variations d'une fonction
- ⇝ Découvrir deux nouvelles fonctions de référence

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 5:

REPARTONS Á LA DÉRIVE !

Résumé

Ce chapitre reprend les notions et les formules établies en première sur les fonctions dérivées et leurs applications. De plus, on en verra de nouvelles.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I) Dérivabilité

I.1. Nombre dérivé et équation de tangente : rappels

Travail de l'élève 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. **a.** Faire afficher sur la calculatrice le nombre dérivée de f en 0.

   b. Vérifier que le calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ conduit à une forme indéterminée.

   c. Utiliser la quantité conjuguée de $\sqrt{h^2+1}-1$ pour montrer que $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}$ et conclure.

   d. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représantative de f au point d'abscisse 0.

2. **a.** En vous inspirant de la méthode précédente, déterminer $f'(1)$.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représantative de f au point d'abscisse 1.

   c. Vérifier le résultat à la calculatrice.

Définition 1.

Rappelons simplement qu'une fonction f est **dérivable en un réel** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** a, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I lorsqu'elle est dérivable en tout $a \in \mathrm{I}$.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction qui à tout $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre $f'(x)$.

Remarque : En Première, on vous a introduit le nombre dérivé d'une fonction f en a comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse A. Rappelons alors la propriété suivante.

Propriété 1.

Soit f une fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve

L'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ passant par A est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $\mathrm{A}(a; f(a))$ est un point de T_a, les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T_a est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice du Cours : On donne f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3$ et $a = 2$.
Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2. Contrôler graphiquement votre résultat.

I.2. Lien entre continuité et dérivabilité

Propriété 2.

Toute fonction dérivable en a est continue en a. **La réciproque est fausse**.

Preuve

Si f est dérivable en a alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Autrement dit pour h proche de 0, il existe une fonction ϵ tel que :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

c'est-à-dire :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

c'est-à-dire :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

On obtient alors :

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ce qui signifie que f est continue en a.

Remarques :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 (à droite) mais n'est pas dérivable en 0.
- La fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.
- La continuité d'une fonction en a traduit l'absence de « saut » en son point d'abscisse a
  La dérivabilité d'une fonction en a indique que sa courbe représentative admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a (graphiquement, la courbe est « lisse »).
- Par convention, les flèches d'un tableau de variations d'une fonction f traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur les intervalles considérés.

Exercice 1 :

1. Montrer que pour $h \neq 0$ on a :
$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$
2. Déterminer la limite lorsque $h \to 0^+$ de :
$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0}$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 :

1. Montrer que pour $h > 0$ on a :
$$\frac{|h| - |0|}{h - 0} = 1$$
2. En déduire la limite, à droite de 0, du taux d'accroissement de la fonction valeur absolue.
3. Montrer que pour $h < 0$ on a :
$$\frac{|h| - |0|}{h - 0} = -1$$
4. En déduire la limite, à gauche de 0, du taux d'accroissement de la fonction valeur absolue.
5. En déduire que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

I.3. Dérivées des fonctions de référence

Travail de l'élève 2 :

1. Soit u une fonction positive et dérivable sur un intervalle I et g la fonction définie sur I par $g(x) = \sqrt{u(x)}$.
   On cherche à savoir si la fonction g est dérivable sur I et à connaître son éventuelle fonction dérivée.
   Soit $a \in \mathrm{I}$.
   a. Vérifier que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$ conduit à une forme indéterminée.
   b. S'inspirer de la méthode de l'exemple précédent pour montrer que $\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \dfrac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}}$.
   c. Conclure.
2. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à savoir si la fonction u^n est dérivable sur I, et à connaître son éventuelle fonction dérivée en fonction de n.
   Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, on a
$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

b. On suppose de plus que u ne s'annule pas sur I et on pose $n \in \mathbb{Z}^*$. On cherche à savoir si la fonction u^n est dérivable sur I, et à connaître son éventuelle fonction dérivée en fonction de n.
Soit $m > 0$.

i. En utilisant la question 2a) montrer que $\left(\dfrac{1}{u^m}\right)' = \dfrac{-mu'}{u^{m+1}}$

ii. En déduire que pour tout $n < 0$, on a $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

c. Conclure.

Les dérivées des fonctions de référence sont, je l'espère, déjà acquises. Aussi, nous ne rappelons et complétons ici que les règles pour les composées de fonctions.

Dans le tableau suivant, u et v désignent deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Opération sur les dérivées — **lorsque u, v et f sont des fonctions dérivables sur un intervalle I**			
Fonction	**Dérivée**	**Condition $\forall x \in \mathrm{I}$**	**Domaine de dérivabilité**
ku	ku'		I
$u+v$	$u'+v'$		I
$u \times v$	$u'v+uv'$		I
u^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $n<0$: $u(x) \neq 0$	I
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$	I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$	I
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) \geq 0$	I privé des x tels que $u(x)=0$.

Exemples :

Si $f(x) = (5x+3)^7$ sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 7 \times 5 \times (5x+3)^6 = 35(5x+3)^6$.

Si $g(x) = \sqrt{5x+3}$ sur $\left[\dfrac{3}{5};+\infty\right[$ alors g est dérivable sur $\left]\dfrac{3}{5};+\infty\right[$ et $g'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}$.

Preuve

Démontrons uniquement les résultats nouveaux (Cf travail de l'élève précédent)

⇝ $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$

Raisonnons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a $(u^n)' = (u^1)' = u'$ et $nu'u^{n-1} = 1 \times u' \times u^{1-1} = u'$.

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(u^k)' = nu'u^{k-1}$.

Alors on a $u^{k+1} = u^k \times u$.

On applique la formule pour dériver un produit et on obtient

$$(u^{k+1})' = ku'u^{k-1} \times u + u^k \times u' = ku'u^k + u'u^k = (k+1)u'u^k$$

Donc la proposition est héréditaire. Elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons désormais que $n < 0$, alors $m = -n$ est strictement positif. Ainsi

$$u^n = \frac{1}{u^{-n}} = \frac{1}{u^m} = \left(\frac{1}{u}\right)^m$$

avec $m > 0$.

D'après ce qui précède, et la formule de dérivée de l'inverse, on a alors :

$$\begin{aligned}
(u^n)' &= \left(\frac{1}{u^m}\right)' \\
&= \frac{0 \times u^m - mu'u^{m-1} \times 1}{u^{2m}} \\
&= \frac{-mu'}{u^{2m-(m-1)}} \\
&= \frac{-mu'}{u^{m+1}} \\
&= \frac{nu'}{u^{-n+1}} \\
&= nu' \times u^{n-1}
\end{aligned}$$

Donc la proposition est vrai aussi pour tout $n < 0$. Au final, elle est vraie sur $\mathbb{Z}^*$.

⇝ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Soit $a \in \mathrm{I}$. Le taux d'accroissement de $\sqrt{u}$ en a est :

$$\begin{aligned}
\tau(a) &= \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h\left(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}\right)} \quad \text{multiplication par l'expression conjuguée)}
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = u'(a) \times \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$$

Ceci est bien un réel car $u(a) \neq 0$, et ceci est vrai pour tout $a \in \mathrm{I}$ telle que $u(a) \neq 0$. Donc on obtient le résultat du tableau.

I.4. Composée de fonctions $f \circ u$

Théorème 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a, b deux réels.
Soit u une fonction affine définie par $u(x) = ax + b$ sur un intervalle J tel que $u(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$.
On appelle g la fonction $f \circ u$ définie sur J. Ainsi :

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathrm{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(ax+b) \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur J et pour tout $x \in \mathrm{J}$ on a $g'(x) = a \times f'(ax+b)$

Exemple :
On constate que les exemples précédents peuvent être retrouvés grâce à ce théorème (à faire).
Il nous sera par contre indispensable pour les fonctions affine suivie d'une fonction cosinus ou sinus.

Preuve
Soit $t \in \mathrm{J}$. Le taux d'accroissement de g en t est :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \frac{f(a(t+h)+b) - f(at+b)}{h} \\ &= \frac{f(at+b+ah) - f(at+b)}{h} \end{aligned}$$

On pose $\mathrm{T} = at + b$ et $\mathrm{H} = ah \iff h = \frac{\mathrm{H}}{a}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{T})}{\frac{\mathrm{H}}{a}} \\ &= a \times \frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{T})}{\mathrm{H}} \end{aligned}$$

Comme $t \in \mathrm{J}$, on a $\mathrm{T} \in \mathrm{I}$ par définition de J. Donc f est dérivable en T.
De plus, quand h tend vers 0, $\mathrm{H} = ah$ aussi. D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \tau(h) &= \lim_{\mathrm{H} \to 0} a \times \frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{T})}{\mathrm{H}} \\ &= a \times \lim_{\mathrm{H} \to 0} \frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{T})}{\mathrm{H}} \\ &= af'(\mathrm{T}) \\ &= af'(at+b) \end{aligned}$$

D'où $g'(t) = af'(at+b)$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathrm{J}$, on a bien le théorème.

Remarque : Les trois cas démontrés cette année sont en fait des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée $g = f \circ u$, où u n'est pas forcément affine.
On admettra le résultat général (non au programme) suivant :

Théorème 2.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et u une fonction dérivable sur un intervalle J à valeurs dans I alors $f \circ u$ est dérivable sur l'intervalle J et pour $x \in \mathrm{J}$ on a :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f' \circ u(x)$$

Exercice 3 :

1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$ par $f(x) = \sqrt{-3x+2}$.
   - **a.** Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$
   - **b.** En déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = (-3x+2)^5$$
   - **a.** Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire son tableau de variation.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$ par $h(x) = \dfrac{1}{3x-5}$
   - **a.** Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$ et calculer $h'(x)$ pour $x \neq \frac{5}{3}$.
   - **b.** En déduire le tableau de variation de h.

Exercice 4 :

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée de la fonction f définie par :
   $$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$
2. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

1. Donner les limites de f en 0 et $+\infty$; préciser les éventuelles asymptotes.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et l'expression de la fonciton dérivée de f.
3. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 101-112 p 80 (fonctions rationnelles + Xcas)
n° 107 p 83 (asymptote oblique)
n° 108 p 83 (fonction auxiliaire classique)
n° 127 p 87 (suite des polynômes de Tchebychev)

II) Etude des fonctions trigonométriques de référence

II.1. Variations et propriétés

Travail de l'élève **3.** *On utilise le logiciel Géogébra.*

1. **Figure de base**
   a. Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O;I;J)$.
   b. Choisir le radian comme unité d'angle dans « Options ».
   c. Tracer le cercle trigométrique de centre O.
   d. Créer un curseur t, variant entre -5π et 5π.
   e. On veut placer un point M associé au réel t sur le cercle.
   Pour cela, dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1; t)$

   Remarque : Attention, le point-virgule est essentiel ! En effet, le couple $(1; t)$ ne désigne pas pour Géogébra les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O;I;J)$, mais lui indique que M sera à une distance 1 de l'origine O du repère (donc il sera bien sur le cercle), et tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = t$ radians. On parle de coordonnées **polaires**.

   f. Créer en ligne de commande le point C de coordonnées $(x_M, 0)$ et le point S de coordonnées $(0, y_M)$
2. **Variations**
   a. Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O;I;J)$? Son ordonnée ?
   b. Avec le curseur, déplacer le point M.
   Décrire son trajet, ainsi que ceux de C et de S correspondants.
   c. En déduire les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[-5\pi;5\pi]$.
   On précisera les valeurs où ces fonctions s'annulent.
3. **Courbes représentatives**
   a. Compléter la figure précédente en créant les points R et Q de coordonnées respectives (t, x_M) et (t, y_M).
   b. Faire afficher leurs traces. Quelles courbes représentatives voient-on se dessiner ?
   c. Vérifier la cohérence entre les courbes obtenus et vos tableaux.
4. **Propriétés**
   a. Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?
   b. Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ?
   Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?
   c. Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ?
   Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

Travail de l'élève **4.** En complément pour la parité (en AP ? ?) : Activité 3 p 93 (Déclic)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique (orienté, de rayon 1 avec une origine).

Définition 2.

La fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M est la fonction cosinus, notée cos. Ainsi $x \longmapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M est la fonction sinus, notée sin. Ainsi $x \longmapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3. (Définitions)

Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $(x+2\pi)$ sont confondus. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction périodique, de période T (ie telle que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$) sur l'intervalle $[0;T]$ est la même que sur tout intervalle du type $[kT;(k+1)T]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Grâce à cette propriété, il suffira d'étudier ces fonctions sur un intervalle de taille 2π de notre choix, par exemple $[-\pi;\pi]$.

Propriété 4. (Définitions)

Pour tout réel x, les points M et M' du cercle trigonométrique, associés respectivement à x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

On dit que la fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire (ie tel que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Celle d'une fonction impaire (ie telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$) est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Grâce à cette propriété, on peut limiter l'étude de ces fonctions à un intervalle de longueur π, par exemple $[0;\pi]$

Reproduire les tableaux et les illustrations de la page 94 du Déclic, pour résumer les résultats précédents.

II.2. Dérivées

Travail de l'élève **5.** Déclic : Activité 2 p 92

Théorème 3.

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc continues sur $\mathbb{R}$ aussi) et pour tout réel x on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Preuve

- Exo 44 p 108

Propriété 5.

On en déduit la limite suivante à connaître :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Preuve

On a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 12 p 99 (fct tangente, en DM ?)
n° 23 + 28 à 31 + 45 + 47 + 59 + 60 p 105 (dérivées et limites)
n° 50-51-53-65 p 108 (étude de fonctions, tangente)
n° 66-72 p 111 (avec une fonction auxiliaire) n° 68 p 113 (suite de fonctions) n° 71 p 111 (TVI avec trigo)