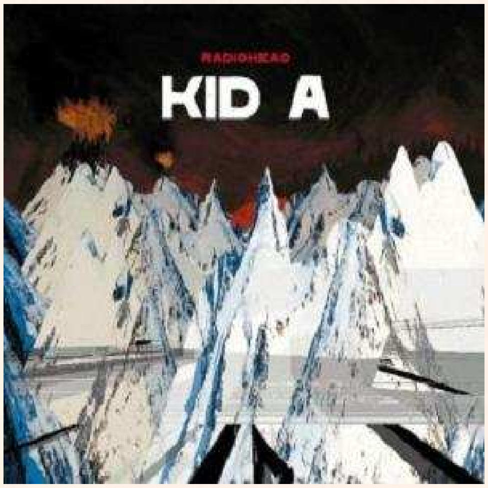
Chapitre 1

La suite des suites !

Hors Sujet



Titre : « Kid A »
Auteur : Radiohead
Présentation succinte : Kid A est le quatrième album du groupe de rock britannique Radiohead, il est sorti en 2000. Alors que les albums précédents (tel OK Computer) restent dans un style rock alternatif, les albums suivants sont beaucoup plus psychédéliques : Kid A marque l'apogée de ce style expérimental de Radiohead. Pour cette raison, il est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre. Dans cet album, les guitares ont quasiment disparu au profit de synthétiseurs et de sampleurs. Le nom donné à l'album, Kid A (littéralement « Enfant A »), évoque pour certains un premier enfant cloné. Pour d'autres, il laisse penser que le groupe le considère comme son premier enfant. Avec Kid A, l'album suivant de Radiohead, Amnesiac, forme un diptyque de musique expérimentale, un prolongement : Kid A et Amnesiac forment en réalité le diptyque Kid Amnesiac. Ce disque comporte une majorité de chansons composée principalement de synthétiseurs et de boîtes à rythmes (Kid A, Idioteque, Everything in Its Right Place...), tout en gardant des sonorités pop/rock (In Limbo) et en explorant d'autres univers comme le free-jazz (The National Anthem). Selon Thom Yorke et Jonny Greenwood cet album est inspiré en partie par le livre No Logo de la journaliste canadienne Naomi Klein. Les membres du groupe pensaient d'ailleurs au départ à appeler l'album No Logo, en hommage à ce livre qui décrit la société de consommation.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir les définitions de convergence et divergence
- ⇝ Connaître les limites usuelles et les opérations sur les limites
- ⇝ Savoir trouver la limite d'une forme indéterminée
- ⇝ Utiliser les théorèmes de comparaison
- ⇝ Démontrer qu'une fonction est continue ou non.
- ⇝ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

« *I wish I was special* »
RADIOHEAD (EXTRAIT DE CREEP)

CHAPITRE 1 :

LA SUITE DES SUITES !

Résumé

Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des *fonctions numériques* (celles définies sur une partie de $\mathbb{N}$), les suites méritent une étude à part entière. En effet, elles jouent un rôle extrêmement important dans bien des sciences, permettant de fournir une approximation du « réel ».
Par exemple, on les utilise en biologie des populations pour décrire le cycle de reproduction des lapins, en astronomie dans les lois de répartition des planètes, en physique dans la théorie des particules élémentaires, en informatique dans les algorithmes et simulations (et via les ordinateurs, dans toutes nos activités numériques). Mais cette omniprésence n'est pas un hasard, car tous ces domaines se servent d'équations mathématiques. Or les suites occupent une place de choix en mathématiques depuis plus de 2000 ans.
Pourquoi un tel intêret, alors qu'il s'agit simplement de ranger une succession infifnie de nombres, liés par une loi, comme quand on énumère les jours ? Parce que cette simplicité n'est qu'apparente : l'étrange n'est jamais loin.

Prenons par exemple la suite des « puissances de un demi » $(u_n)_{n\geq 0}$: $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{8}\,;\,\frac{1}{16}\,;\,\dots\,;\,\left(\frac{1}{2}\right)^n\,;\,\dots\right)$
Si ces nombres représentaient des tiges en bois mesurant chacune la moitié de la précédente (en commençant par 1 mètre), n'est-ce pas étonnant que la longueur maximale qu'on puisse atteindre en les mettant bout à bout ne dépasse pas 2 mètres, même avec une infinité de tiges ? Cela a stupéfait les savants qui l'ont découvert au XVIII^e siècle. Comment admettre que l'infini (le nombre de tiges) puisse être contenu dans le fini (2 mètres) ? Il s'en est suivi de violentes disputes entre les pro-infini et les contre, qui n'ont fait que s'amplifier jusqu'au XX^e siècle. Bref, ce sont les suites qui ont introduit l'infini dans l'arithmétique et l'analyse ...

Mais si le XVIII^e siècle est un tournant dans l'histoire des suites et de l'infini, leur origine remonte à Archimède de Syracuse, le mathématicien grec du III^e siècle avant JC. Archimède voulait résoudre une question qui n'avait rien à voir avec l'infini, le problème de la quadrature du cercle, grande énigme des maths anciennes : étant donné un cercle, comment construire une figure de même surface mais composée de carrés ou de triangles (figures que les Grecs savaient bien mesurer). Tel était le but d'Archimède ... Au lieu de répondre à son problème, il a découvert les suites et, sans le savoir, il a mis les mathématiciens sur la voie de l'infini.
Comment cela s'est-il produit ? Archimède pensait que la bonne méthode pour « quarrer » le cercle était de l'encadrer entre deux figures faites de triangles, puis de faire converger la taille de ces triangles jusqu'à les faire coïncider (comme si l'on cherchait à emprisonner un objet entre des murs qui se rapprochent). Archimède choisit comme figures connues et quarrables pour coïncer le cercle, les polygones réguliers, faits de triangles disposés en pétales de fleur, en commençant par l'hexagone (six côtés, six triangles équilatéraux) : il encadre le cercle entre l'hexagone inscrit et l'hexagone circonscrit. Ensuite, il passe au dodécagone (12 côtés), puis il enchaîne sur le polygone à 24 côtés, puis 48 et enfin 96. A chaque pas, les mesures se rapprochent, mais jamais elles ne s'égalent ... Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π.
Las, Archimède ne résoudra jamais le problème de la quadrature du cercle, et pour cause. Les mathématiciens du XIX^e siècle démontreront qu'il n'a pas de solution, d'où l'expression « C'est la quadrature du cercle ! ». Mais Archimède a bel et bien inauguré l'histoire des suites, car dans sa méthode, il montre comment calculer la surface du polygone n en fonction de celui qui précède (le $n-1^{eme}$). Le terme u_n défini par le terme u_{n-1}, c'est bien là une suite, la première du genre, et qui peut être prolongée autant que l'on veut ... jusque dans l'infini.

Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice. On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I) Les suites arithmétiques et géométriques : ce qu'il faut savoir

Arithmétique

Définition 1.

Une suite u de premier terme u_0 et de raison r est **arithmétique** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

On considère désormais une suite arithmétique (u_n) de raison r.

Propriété 1.

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a

⇝ Relation entre u_n et u_p :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

⇝ En particulier :

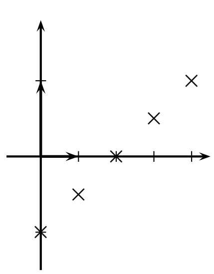
$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

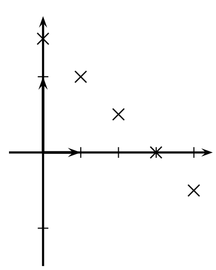
$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

Représentation graphique dans le plan :
Ce sont les points d'abscisse entière positive de la droite de coefficient directeur r et passant par le point de coordonnées $(0; u_0)$

Exemple :

$u_0 = -1$ et $r = 0.5$, $v_0 = 1$ et $r = -0.5$





Géométrique

Définition 2.

Une suite u de premier terme u_0 et de raison q est **géométrique** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$$

On considère désormais une suite géométrique (u_n) de raison q.

Propriété 2.

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a

⇝ Relation entre u_n et u_p :

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

⇝ En particulier :

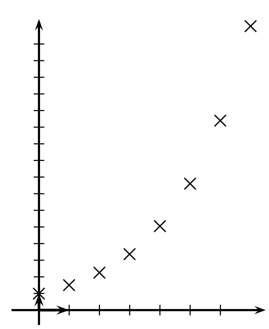
$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

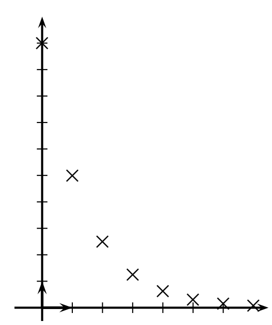
$$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

Représentation graphique dans le plan :
Si $q > 0$, ce sont les points d'abscisse entière positive d'une courbe exponentielle (que nous découvrirons plus tard).

Exemple :

$u_0 = 1$ et $r = 1.5$, $v_0 = 5$ et $r = 0.5$





Théorème 1.

- Si $r > 0$ alors u est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r = 0$ alors u est constante ;
- Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Théorème 2.

Soit u une suite définie par : $u_n = q^n$ alors :

- Si $q = 0$ ou $q = 1$ alors u est constante égale à 0 (définie sur $\mathbb{N}^*$) ou à 1
- Si $q > 1$ alors u est croissante et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
- Si $0 < q < 1$ alors u est décroissante et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
- Si $-1 < q < 0$ alors u n'est pas monotone et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
- Si $q < 1$ alors u n'est pas monotone et diverge.

Théorème 3.

La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme p et de dernier terme d est :

$$\boxed{S = n \times \frac{p+d}{2}}$$

Exemple :

$$u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{20} = 11 \times \frac{u_{10}+u_{20}}{2} = 2200$$

Théorème 4.

La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme p est :

$$\boxed{S = p \times \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Exemple :

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{20} = v_1 \times \frac{1-1,03^{20}}{1-1,03} = 2767,65$$

II) Le raisonnement par récurrence

II.1. Exemple introductif

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Cette suite est définie par **récurrence** (chaque terme se calcule à partir du précédent).
But : On souhaiterait obtenir une formule **explicite** du terme général u_n en fonction de n (pour pouvoir calculer n'importe quel terme en fonction de son rang sans avoir à calculer chacun des termes précédents) .
La suite n'est ni géométrique, ni arithmétique, et la formule ne semble pas évidente. Par conséquent on va calculer les premiers termes pour se faire une idée.

Travail de l'élève 1 : Une conjecture valable pour chaque rang n

1. Calculer à la main les premiers termes de la suite jusqu'à u_5.
2. Etablir à la calculatrice le tableau de valeurs de (u_n) et vérifier vos résultats.
3. La plupart des calculatrices n'affichent pas dans leur tableau une valeur exacte à partir de u_{20}.
   Grâce aux premières lignes de ce tableau, conjecturer la valeur exacte de u_{33} et u_{34}.
4. Ces résultats sont-ils certains ? Que faudrait-il faire pour les vérifier ?
5. Quelqu'un a eu le courage de se lancer dans cette vérification et a trouvé $u_{33} = 8\,589\,934\,591$, mais pour u_{34}, sa calculatrice ne donne qu'une valeur approchée.
   Vérifier à la calculatrice votre conjecture pour u_{33}, puis, sans calculatrice, vérifier votre conjecture sur u_{34}.
6. Conjecturer une formule explicite pour calculer u_n. Ce résultat est-il certain pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Attention !
Une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une proposition **supposée** résultant d'un certain nombre d'observations.

Question :
Alors comment confirmer, par une démonstration, la proposition conjecturée ci-dessus pour chaque rang n ?

Supposons un instant que pour un certain entier k, on ait effectivement $u_k = 2^k - 1$
Dans ce cas on aurait :

$$u_{k+1} = 2 \times u_k + 1 = 2 \times (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$$

Autrement dit si la proposition est vraie au rang k alors elle est aussi vraie au rang $k+1$.
On dit que la proposition est **héréditaire**.

Au final on a vu que la proposition était vraie au rang $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 (on dit que la proposition est **initialisée**).
Mais comme la proposition est héréditaire elle sera aussi vraie au rang 7, puis au rang 8, puis au rang 9, ...
Si bien que notre proposition est finalement vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.
Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence**.

II.2. Principe du raisonnement par récurrence et exemples

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $\mathscr{P}$ une proposition définie sur $\mathbb{N}$. Si :

$\rightsquigarrow$ La proposition est <u>initialisée</u> à au rang 0 (i.e si $\mathscr{P}(0)$ est vraie)

$\rightsquigarrow$ La proposition est <u>héréditaire</u> à partir du rang 0 (i.e si $\forall n \geq 0$ on a $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$)

Alors :

La proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Preuve</u> **Hors Programme**

Supposons qu'il existe au moins un entier n pour lequel $\mathscr{P}(n)$ n'est pas vraie, et appelons m le plus petit d'entre eux.

Comme m est le plus petit d'entre eux, et que $m \neq 0$ (car on a déjà vérifié l'initialisation) on sait que pour tout $0 \leq n < m$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. En particulier $\mathscr{P}(m-1)$ est vraie.

Mais d'après le caractère héréditaire de la proposition, on sait que cela entraine $\mathscr{P}(m)$ vraie aussi. Ce qui est absurde ...

Remarque : Le principe du raisonnement par récurrence sur un intervalle du type $[\![N, +\infty[$ est identique, ainsi que sa démonstration. Il suffit de remplacer 0 par N.

<u>Exercice du Cours</u> : Compléter la démonstration par récurrence suivante, afin de montrer que la somme des n premiers entiers non nuls vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On veut montrer que la proposition « » est vraie pour tout $n \geq$

$\rightsquigarrow$ **Initialisation :** pour $n =$

- La somme des n premiers entiers non nuls vaut
- Et $\dfrac{n(n+1)}{2} =$

Donc la proposition est vraie au rang .

$\rightsquigarrow$ **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier $k \geq$ tel que

On cherche à montrer que

Or $1+2+3+\cdots+\cdots+(k+1) =$

$=$

$=$

La proposition est vraie au rang .

Donc la proposition est

$\rightsquigarrow$ **Conclusion** : La proposition est et .

Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

<u>Exercice du Cours</u> : On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$.

Solution :

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n \leq 3$ »

⇝ **Initialisation :** pour $n = 0$
$u_0 = 0$ et on a bien $0 \leq 0 \leq 3$
Donc $0 \leq u_0 \leq 3$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

⇝ **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a $0 \leq u_k \leq 3$
On cherche à montrer $\mathscr{P}(k+1)$: « $0 \leq u_{k+1} \leq 3$ » ou encore $0 \leq \sqrt{u_k + 6} \leq 3$

$$\begin{aligned} \text{Or } 0 \leq u_k \leq 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad 6 \leq u_k + 6 \leq 9 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{6} \leq \sqrt{u_k+6} \leq \sqrt{9} \quad \text{car la fonction racine carré conserve l'ordre sur les positifs} \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq u_{k+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. La proposition est héréditaire.

⇝ **Conclusion** La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de 0.
Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

Exercice 1 : On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1 + 3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 2 : La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Su $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.
Illustrer graphiquement les trois derniers résultats.

Exercice 4 :

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
(A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 6 :

1. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. On note S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls.
   a. Calculer S_1, S_2 et S_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ [a]
   c. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 3\,025$?
3. On note P_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels **pairs** non nuls.
   a. Calculer P_1, P_2 et P_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $P_n = 2n^2(n+1)^2$
   c. Quel est l'entier n pour lequel $P_n = 1\,800$?
4. On note I_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels **impairs** non nuls.
   a. Calculer I_1, I_2 et I_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n = n^2(2n^2 - 1)$
   c. Quel est l'entier n pour lequel $I_n = 41\,328$?

Exercice 7 : Montrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

Exercice 8 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 9 : Pour tout entier $n \geq 1$, on note la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.
On rappelle la proposition suivante, énoncée en 1S, mais non démontrée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{on a} \quad f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$$

1. Démontrer que pour $n = 1$ la proposition est vraie.
2. Vérifier que les formules de 1S pour $n = 2$ et $n = 3$ correspondent à la formule générale énoncée ci-dessus.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exercice 10 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'**inégalité de Bernoulli** est vraie :

$$\forall x > 0 \text{ , on a } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 11 :

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
2. Compléter la propriété suivante, vu en première :
   Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$
3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
4. Démontrer que pour tous réels a et b on a

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(a). On utilisera la formule démontrée dans le cours sur la somme des n premiers entiers.

5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

formule appelée **formule du binôme de Newton**.

7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

II.3. Quelques exercices corrigés

Exercice du Cours : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution :

On considère la propriété $\mathscr{P}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

⇝ **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $0 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

⇝ **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie i.e que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour un certain rang n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$, par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

la propriété est donc héréditaire, et donc on a montré par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice du Cours : Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = 2^n$

Solution :

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n = 2^n$

⇝ **Initialisation** : $u_0 = 2^0 = 1$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

⇝ **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(i)$ soit vraie $\forall i \leq n$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1}$

On a : $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} = 5\times 2^n - 6\times 2^{n-1} = 10\times 2^{n-1} - 6\times 2^{n-1} = 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

On en conclut donc, par récurrence, que $u_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice du Cours : Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Solution :

Notons $\mathscr{P}(n) : f_n$ est dérivable

⇝ **Initialisation** : $f_2(x) = x^2$, on a :

$$\frac{f_2(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

qui tend vers $2x$ lorsque h tend vers 0, par conséquent $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

⇝ **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(i)$ soit vraie $\forall i \geq n$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e montrons que f_{n+1} est une fonction dérivable.

Notons que $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n \times f_1$, or le produit de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, par conséquent f_{n+1} est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) f_1(x) + f_n(x) f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^{n-1}x = nx^n + x^n = (n+1)x^n \qquad \text{Cqfd}$$

Exercice du Cours : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

Solution :

⇝ **Initialisation** : $u_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1$

⇝ **Hérédité** : Supposons que, pour un entier $n \geq 1$ on ait $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

Montrons que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$. On a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1 \iff \ldots\ldots \iff \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \leq \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leq 1$$

Or $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc on a bien

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

III) Comportement asymptotique d'une suite

III.1. Notion de convergence

Travail de l'élève 2 :

On considère les suites u et v définies pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Et on donne l'algorithme ci-contre.

Algorithme 1 :

Variable(s) :
n est un nombre entier et u est un nombre réel.
Début
  $n := 1$; $u := 1$
  Tant que ($u \geq 10^{-3}$) **Faire**
    $n := n + 1$
    $u := \dfrac{1}{n^2}$
  Fin Tant que
  Renvoyer n
Fin

1. **a.** Compléter le début de trace de l'algorithme ci-dessus.

n					
u					

b. A quel résultat aboutit la mise en oeuvre de l'algorithme ci-contre ?

c. Fabrice affirme : « $\forall n \geq 32$ on a $u_n < 10^{-3}$ »

i. Proposer une traduction française de cette phrase mathématique.

ii. Fabrice a-t-il raison ? Expliquer.

2. **a.** Modifier cet algorithme pour obtenir la première valeur N telle que $u_{\mathrm{N}} < 10^{-6}$.

b. Que renvoit alors l'algorithme ?

c. Loïc affirme : « $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}$ on a $u_n < 10^{-6}$ »

i. Proposer une traduction française de cette phrase mathématique.

ii. Loïc a-t-il raison ? Expliquer.

d. Soit ϵ un réel strictement positif.
Démontrer qu'il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$ on ait :

$$0 < u_n < \epsilon$$

e. Norbert affirme : « $\forall \epsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathrm{N}$ on a $0 < u_n < \epsilon$ »

i. Proposer une traduction française de cette phrase mathématique.

ii. Norbert a-t-il raison ? Expliquer.

On dit que la suite u converge vers 0 ou que la limite de la suite u est 0, on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

3. Démontrer de façon analogue que la suite v converge vers 0.

Définition 3.

On dit qu'une suite (u_n) **admet une limite** ℓ (ou **converge vers** ℓ) lorsque

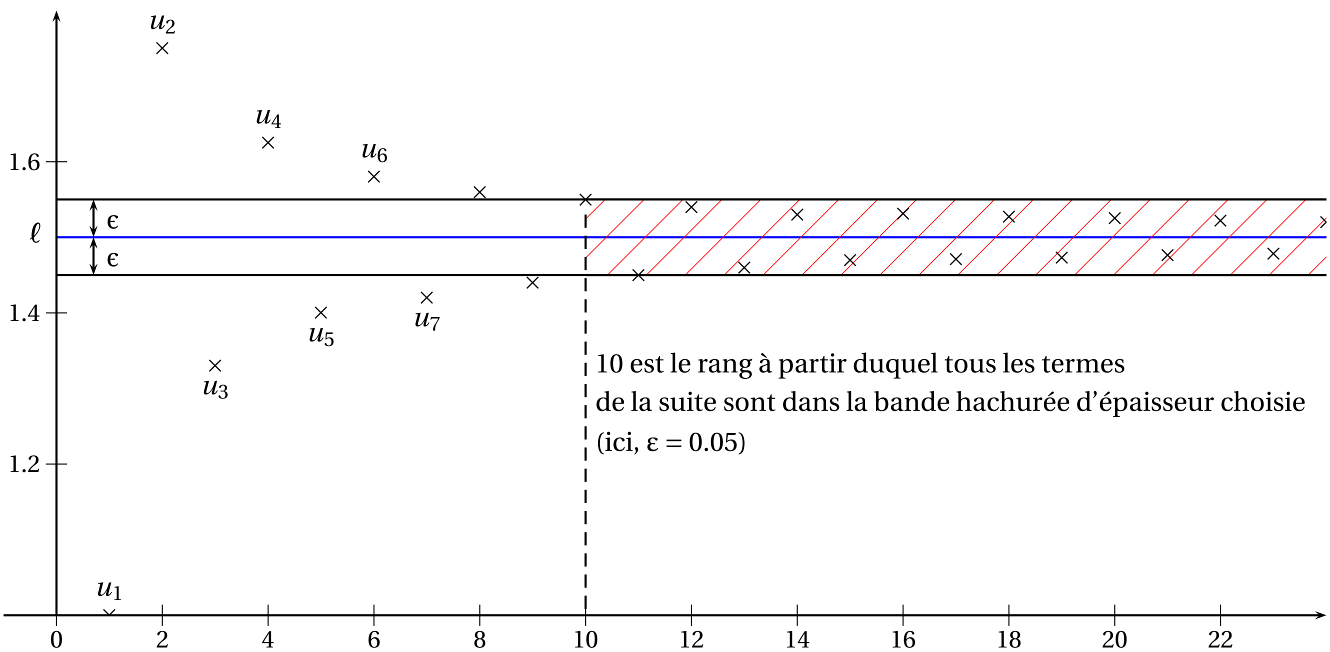
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \text{on a} \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi « petit » soit-il) contient aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N, ie $\forall n \geq N$ on a $u_n \in I$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarques :

- Concrètement, les termes u_n deviennent aussi proches de ℓ qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang.
- Une suite est donc divergente si elle n'admet pas de limite, ou encore si elle admet $\pm\infty$ comme limite. Par exemple c'est le cas de la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ qui n'admet pas de limite, ou encore de la suite $u_n = n$ dont la limite vaut $+\infty$.
- On utilise en général un intervalle centré en ℓ.
- Graphiquement, la notion de limite se traduit ainsi :
  Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang (ou un indice) à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.

Illustration graphique : Avec la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$
Représenter ses 20 premiers termes à la calculatrice avec la fenêtre suivante : `Xmin=0 Xmax=20 Ymin=1 Ymax=1.8`



Remarque : Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{3}{2}$

Exercice du Cours :

1. Conjecturer à la calculatrice les limites éventuelles des suites suivantes.

a. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ **b.** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} : v_n = \dfrac{5n+1}{n+3}$ **c.** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} : w_n = (-1)^n$

2. **a.** A partir de quel rang N la distance entre u_n et sa limite est-elle strictement inférieur à 0.001 ?
   b. Même question pour (v_n).
3. Démontrer vos conjectures.

Solution **:**

1. **a.** A la calculatrice, on conjecture que la suite u converge vers 2.
   b. A la calculatrice, on conjecture que la suite v converge vers 5.
   c. La suite (w_n) ne peut pas converger car elle prend alternativement les valeurs 1 et -1.
2. Dans les deux cas, on résoud des inéquations. Le plus petit N possible est donc :
   a. Pour $\varepsilon = 0.001$ on a $N = E(1000) + 1 = 1001$.
   b. Pour $\varepsilon = 0.001$ on a $N = E(14000 - 3) + 1 = 13998$.
3. Pour (u_n) : Soit $\varepsilon > 0$. On résout l'inéquation : $|u_n - 2| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

   En posant $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - 2| < \varepsilon$.

   Pour (v_n) : Soit $\varepsilon > 0$. On résout l'inéquation :

$$|u_n - 5| < \varepsilon \iff \left|\frac{-14}{n+3}\right| < \varepsilon \iff \frac{14}{n+3} < \varepsilon \iff n > \frac{14}{\varepsilon} - 3$$

   En posant $N = E\left(\dfrac{14}{\varepsilon} - 3\right) + 3$, pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - 5| < \varepsilon$.

Une méthode pour déterminer la limite ℓ d'une suite
⇝ On peut utiliser la calculatrice pour conjecturer sa limite ℓ
⇝ On pose $\varepsilon > 0$ quelconque et on résout $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
⇝ On choisit alors N =partie entière de la solution trouvée +1
Mais nous aurons bientôt plein de résultats pour déterminer plus facilement des limites, rassurez-vous.

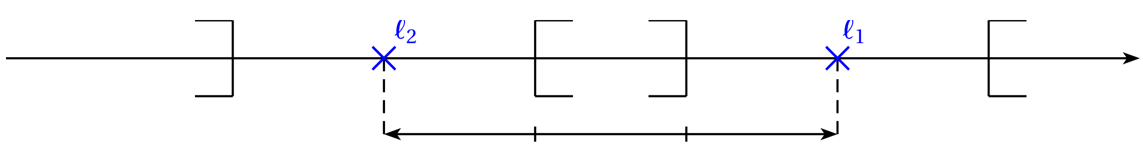
Théorème 5.

Si une suite (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique.

Preuve **Sous forme de ROC**

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) admet deux limites différentes ℓ_1 et ℓ_2 telles que $\ell_1 < \ell_2$.
Notons ϵ le réel strictement positif tel que $\epsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$

1. Pourquoi à partir d'un certain rang p, tous les termes u_n sont-ils dans l'intervalle $I =]\ell_1 - \epsilon; \ell_1 + \epsilon[$?
2. En opérant de même avec ℓ_2, montrer que l'on aboutit à une contradiction. Que peut-on conclure ?



Remarque : Si (u_n) admet une limite, alors toute sous-suite de (u_n) admet la même limite.

Exercice 12 : Soit e un réel strictement positif.

1. Résoudre dans $[0;+\infty[$ l'inéquation $\dfrac{3}{2x+1} < e$
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3}{2n+1}$
   a. Démontrer que $u_n < e$ à partir d'un certain rang N.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

III.2. Notion de divergence

Définition 4.

On dit qu'une suite qui ne converge pas est divergente.
Par conséquent, une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite.

Exemples :
Voici quelques suites divergentes :

$\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\geq 0} : u_n = n$ $\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\geq 0} : u_n = n^3 - n^2 + n - 1$ $\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\geq 0} : u_n = (-1)^n$

Définition 5.

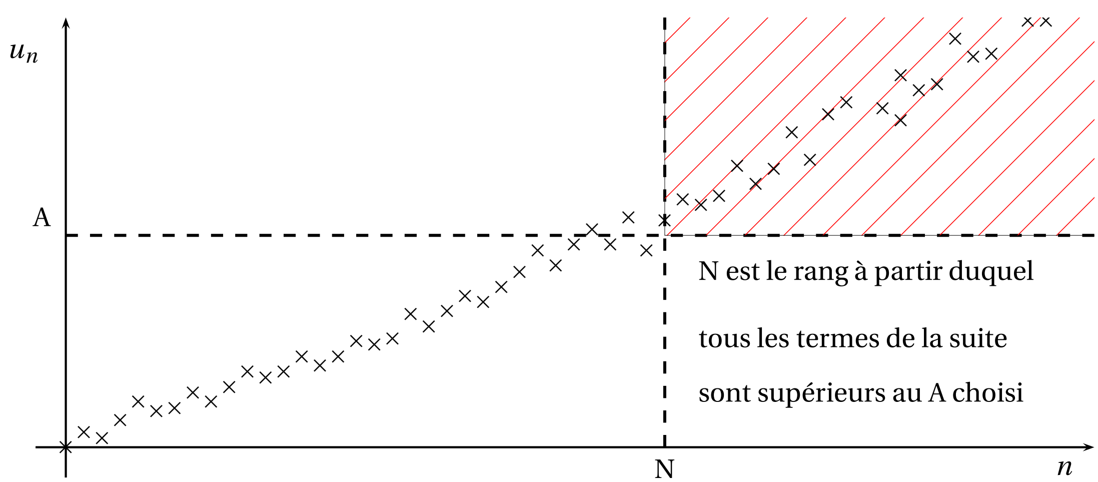
On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque

$$\forall \mathrm{A}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad \text{on a} \quad u_n > \mathrm{A}$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert du type $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N (dépendant du A considéré), ie $\forall n \geq \mathrm{N}$ on a $u_n > \mathrm{A}$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On définit de même la divergence vers $-\infty$ à l'aide d'intervalle du type $]-\infty;\mathrm{A}[$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Illustration graphique :



Remarque : Dire que (u_n) tend vers $+\infty$ revient à dire que :
- Concrètement, les termes u_n deviennent aussi grands qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
- Tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux (les premiers).

Exercice du Cours :

1. Démontrer que chacune des suites suivantes diverge vers $\pm\infty$:
   - **a.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n$
   - **b.** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = n^2$
   - **c.** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme génral $w_n = -(n+1)^2$
2. **a.** A partir de quel rang a-t-on $u_n > 10^6$?
   - **b.** Même question pour v_n.
   - **c.** A partir de quel rang a-t-on $w_n < -10^6$?

Solution :

1. **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. En effet :
   Soit $A < 0$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $u_n = n > A$, donc on peut choisir $N = 0$.
   Soit A un réel positif. Il suffit de choisir $N = A + 1$.

   b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. En effet :
   Soit $A < 0$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $u_n = n^2 > A$, donc on peut choisir $N = 0$.
   Soit A un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$.
   On remarque que $u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$.
   Si on choisit N le premier entier supérieur strictement à $\sqrt{A}$, ie $N = E\left(\sqrt{A}\right) + 1$ alors $u_n = n^2 > A$ pour tout $n \geq N$. Donc ce N convient.

   c. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$. En effet :
   Soit $A > 0$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $u_n = n^2 > A$, donc on peut choisir $N = 0$.
   Soit A un réel négatif. On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]-\infty;A[$.
   On remarque que $w_n < A \iff -(n+1)^2 < A \iff n > \sqrt{-A} - 1$.
   Si on choisit N le premier entier supérieur strictement à $\sqrt{A}$, ie $N = E\left(\sqrt{|A|} - 1\right) + 1 = E\left(\sqrt{|A|}\right)$ alors $v_n < A$ pour tout $n \geq N$. Donc ce N convient.
2. Dans tous les cas on a choisit le plus petit N convenable. Donc :
   - **a.** Pour $A = 10^6$ on a $N = 10^6 + 1$.
   - **b.** Pour $A = 10^6$ on a $N = 10^3 + 1$.
   - **c.** Pour $A = -10^6$ on a $N = 10^3$.

Une méthode pour montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$
- On traite le cas $A < 0$ trivialement.
- On pose $A > 0$ quelconque et on résout $u_n > A$.
- On choisit alors N =partie entière de la solution trouvée +1

Exercice 13 : Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - n$.

1. Résoudre les inéquations suivantes : $v_n > 10^5$ et $v_n > 10^{10}$
2. Conjecturer la limite de la suite (v_n) puis la démontrer.

III.3. Limites de référence

Travail de l'élève 3 : Exos 45 et 51 p 34 (Déclic)

Théorème 6.

⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ ⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ ⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ ⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$:

⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ ⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

***Preuve* Partielle**

⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Soit A un réel positif (le cas négatif est trivial). On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$.
On remarque que $u_n > A \iff \sqrt{n} > A \iff n > A^2$.
Si on choisit $N = E\left(A^2\right) + 1$ alors $u_n > A$ pour tout $n \geq N$. Donc ce N convient.

⇝ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
Soit ϵ un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $I =]-\epsilon;+\epsilon[$.
On remarque que $\dfrac{1}{n^2} > 0$ pour tout entier n, on cherche donc à déterminer à partir de quel entier n_0 on a :

$$0 < u_n < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n^2 \iff 0 < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$$

Si on choisit N le premier entier supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ alors $u_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Donc ce N convient.

III.4. Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Cas d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Cas d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	**On ne peut pas conclure directement**

Cas d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ ou ∞	0	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	0	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	**On ne peut pas conclure directement**	0	**On ne peut pas conclure directement**

Exercice du Cours : Soient les suites u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2}{3n+5}, \quad ; \quad v_n = (2n+4)(-5n+7) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{3-\frac{4}{n}}{\frac{2}{n}}$$

***Solution* :**

- Pour la suite u, par somme et produit on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+5 = +\infty$.
  Par quotient on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Pour la suite v, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+4) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n+7) = -\infty$.
  Par produit, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
- Pour la suite w, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3-\dfrac{4}{n}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ par valeurs positives.
  Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Remarque : Ces règles sur les opérations sont naturelles, si on a un peu de bon sens. Mais il faut être conscient que tous les résultats de ces tableaux se démontrent (et certains ne sont pas évidents). Nous ne présenterons ici aucune démonstration et nous admettrons tous ces résultats.
Il importe surtout de retenir les cas où on ne peut pas conclure directement. On parle de **forme indéterminée**. C'est dans ces cas là qu'on vous demandera essentiellement des limites. Pour les trouver, il vous faudra faire appel à des calculs du type développement, factorisation (souvent par le terme de plus haut degré), etc, afin de transformer l'écriture de la suite, et d'obtenir une forme connue de limite.

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

« $\infty - \infty$ » « $0 \times \infty$ » « $\dfrac{0}{0}$ » « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée » mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

Exercice du Cours : Soient les suites u et v, w et t définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n - \sqrt{n}, \qquad v_n = \frac{2n^2+1}{-n^2+3}, \qquad w_n = \frac{-n^3+3}{2n^2-5n+1} \qquad \text{et} \qquad t_n = \frac{2n^2-5n+1}{-n^3+3}$$

Solution **:**

⇝ Pour la suite u, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$.
Il s'agit donc d'une forme indéterminée.
Pour trouver la limite, on factorise : $u_n = n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$. Par produit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

⇝ Pour la suite v, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2n^2+1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2+3\right) = -\infty$.
Il s'agit donc d'une forme indéterminée.
Pour trouver la limite, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré :

$$v_n = \frac{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(-1+\dfrac{3}{n^2}\right)} = \frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{-1+\dfrac{3}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{3}{n^2} = -1$. Par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$.

⇝ Pour w et t, il s'agit là encore de formes indéterminées. La méthode est la même que précédemment.
On trouvera $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Remarque : Notons que les trois derniers cas traitent également la forme indéterminée « $0\times\infty$ » puisque $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$

Exercice 14 : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement à l'infini de la suite (u_n).
2. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 15 : On considère deux suites u et v.

1. Déterminer la limite éventuelle des suites u, v et $u+v$ dans les cas suivants :

   a. $u_n = n^2+n$ et $v_n = -n$
   b. $u_n = n+1$ et $v_n = -n^2-n$
   c. $u_n = n+1$ et $v_n = -n+2$
   d. $u_n = n+(-1)^n$ et $v_n = -n$

2. Proposer des termes généraux u_n et v_n tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ tels que

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$
   b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 0$
   c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$
   d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 4$

Exercice 16 : On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \qquad \text{et} \qquad v_n = -(n+1)^2$$

1. **a.** Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   b. On considère l'algorithme ci-contre.
   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?
   c. A partir de quel rang N la distance entre u_n et ℓ est-elle strictement inférieure à $0,001$?
2. **a.** Déterminer la limite de la suite v.
   b. Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n < -10^{10}$.

Algorithme 2 :

Variable(s) :
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.

$n = 0$ et $u = \frac{1}{3}$.
Tant que $(|u-2| \geq 0,001)$ **Faire**
  $n := n+1$ et $u := \frac{2n+1}{n+3}$
Fin Tant que
Afficher n

Exercice 17 : On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{5}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = n^2 - n$$

1. **a.** Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   b. Compléter l'algorithme suivant de manière à ce qu'il affiche le plus petit entier naturel n tel que la distance entre u_n et ℓ soit inférieure à 10^{-5} :
2. **a.** Déterminer la limite de la suite v.
   b. Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 10^{10}$.

Algorithme 3 :

Variable(s) :
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.

$n = 0$ et $u = \ldots.$
Tant que $(\ldots\ldots\ldots)$ **Faire**
  ……… et …………
Fin Tant que
Afficher …

Exercice 18 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n^3+1}$$

1. Etudier les variations de la suite (u_n).
2. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
3. On donne l'algorithme ci-contre.
   a. Que fait-il ?
   b. Programmer cet algorithme sur le logiciel de votre choix et déterminer les rangs N associés à $e = 10^{-2}$ puis $e = 10^{-5}$.

Algorithme 4 :

Entrée(s) :
e est un nombre réel
Variable(s) :
n est un nombre entier
Début
  $n \leftarrow 0$
  Tant que $\left(\left|\frac{n+1}{2n^3+1}\right| \leq e\right)$ **Faire**
    $n \leftarrow n+1$
  Fin Tant que
  Renvoyer n.
Fin

Exemples de programmation

Sur **Algobox** :

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE e
  TANT_QUE (abs((N+1)/(2*pow(N,3)+1))>=e) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le rang associé à "
  AFFICHER e
  AFFICHER " est "
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

Sur **TI 89** :

```
:exo66p35(e)
:Prgm
:0→n
:While abs((n+1)/(2*n^3+1)
)≥e
:n+1→n
:EndWhile
:Disp "le rang associe a "
,e," est ",n
:EndPrgm
```

Sur **TI 82 à 84** :

```
PROGRAM:EXO66P35
:0→N
:Prompt E
:While abs((N+1)
/(2N^3+1))≥E
:N+1→N
:End
:Disp "LE RANG A
SSOCIE A ",E," E
ST ",N
```

Sur **Scilab** :

```
N=0;
e=input("espilon=");
while abs((N+1)/(2*N^3+1))>=e
  N=N+1
end
disp(N,"est",e,"Le rang associé à");
```

Sur **TI Nspire CX CAS** :

Define LibPub **exo66p35**(e)=

Prgm

$n:=0$

While $\left|\dfrac{n+1}{2\cdot n^3+1}\right|\geq e$

$n:=n+1$

EndWhile

Disp "le rang associe a ",e," est ",n

EndPrgm

Sur **Casio**, les commandes sont les mêmes, sauf pour la saisie et l'affichage des variables, respectivement écrites ainsi :

`? → N` et `N ◄`

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 57 - 59 - **63 - 64** p 34 (FI)

IV) Suites majorées, minorées et bornées

IV.1. Définition

Définition 6.

On considère une suite (u_n).
⇝ On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
⇝ On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n > m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
⇝ On dit que (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée i.e s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque : (u_n) est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| < M$.
En effet si tel est le cas alors on a : $-M < u_n < M$.
Réciproquement si (u_n) est bornée alors il existe deux réels a et b tels que $a < u_n < b$.
Choisissons $M = max(|a|;|b|)$, dans ce cas on a $-M \leq a$ et $b \leq M$, et donc :

$$|u_n| < M$$

Exercice du Cours : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$. Montrons que (u_n) est bornée.

Solution :

$$\begin{array}{lll} & -1-1 \leq (-1)^n + \sin n \leq 1+1 & \text{en effet } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin n \leq 1 \\ \iff & -2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq 1 & \\ \iff & -2 \leq u_n \leq 2 & \end{array}$$

Exercice 19 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}, \forall k \geq 2$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$
4. En déduire que (u_n) est majorée.

Exercice 20 : On considère la suite définie par $\quad u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Dresser le tableau de variation de f
3. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 21 : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$ Montrer, par récurrence, que cette suite est bornée.

Solution :

Compte tenu de la définition de la suite (et de la présence du signe radical), on peut minorée la suite par 0, mais par quoi la majorée ??

Le calcul des premiers termes, donne ici une indication :

$$u_1 \simeq 2,45 \quad u_2 \simeq 2,91 \quad u_3 \simeq 2,98$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 \leq u_n \leq 3$ et démontrons cette propriété par récurrence

⇝ **Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie de manière évidente puisque $u_0 = 0$

⇝ **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

Dans ce cas on a : $0 \leq u_n \leq 3$

Par conséquent : $6 \leq 6 + u_n \leq 9$

Et par passage à la racine : $\sqrt{6} \leq \sqrt{6+u_n} \leq 3$

Au final : $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$

Par conséquent $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et on vient de montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

i.e que (u_n) est une suite bornée.

IV.2. Bornes et limites

Théorème 7.

Si (u_n) est une suite convergente alors (u_n) est bornée.

Preuve

Notons ℓ la limite de la suite (u_n), alors tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]\ell-1;\ell+1[$ à partir d'un certain rang N. On a alors pour tout $n \geq \mathrm{N}$:

$$\ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

Notons $m = min(u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{\mathrm{N}-1}; \ell - 1)$ et $\mathrm{M} = max(u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{\mathrm{N}-1}; \ell + 1)$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leq u_n \leq \mathrm{M}$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

Théorème 8. (Admis)

⇝ Toute suite croissante et majorée de réels converge.

⇝ Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est décroissante minorée par 1, donc elle converge.

Attention !

Ici le minorant trouvé est la limite, mais ce n'est pas toujours le cas ! Le théorème donne l'existence d'une limite mais pas sa valeur.

Exercice du Cours : On considère la suite w définie par

$$\begin{cases} w_0 = 0.6 \\ w_{n+1} = 0.7w_n + 0.1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n on a $0 \leq w_{n+1} \leq w_n \leq 1$
2. Justifier alors que la suite w est convergente.
3. Préciser la valeur de sa limite.

Solution :

1. ⇝ Initialisation : $w_1 = 0.52$ donc on a bien $0 \leq w_1 \leq w_0 \leq 1$
   ⇝ Hérédité : On suppose que $\exists k \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_{k+1} \leq w_k \leq 1$. Alors on a

   $$0 \leq 0.7w_{k+1} \leq 0.7w_k \leq 0.7 \iff 0.1 \leq 0.7w_{k+1} + 0.1 \leq 0.7w_k + 0.1 \leq 0.8 \iff 0.1 \leq w_{k+2} \leq w_{k+1} \leq 0.8$$

   Donc on a bien $0 \leq w_{k+2} \leq w_{k+1} \leq 1$. La propriété est héréditaire.
   ⇝ La propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.
2. On déduit de la question précédente que la suite (w_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ.
3. La suite (w_{n+1}) est une sous-suite de (w_n) donc elle converge vers ℓ.
   De plus, $w_{n+1} = 0.7w_n + 0.1$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.7w_n + 0.1 = 0.7\ell + 0.1$.
   Par unicité de la limite on obtient $\ell = 0.7\ell + 0.1 \iff \ell = \dfrac{1}{3}$.

Théorème 9.

⇝ Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
⇝ Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve

⇝ Soit (u_n) une suite croissante non majorée et un intervalle $\mathrm{I} =]\mathrm{A}; +\infty[$ ($\mathrm{A} \in \mathbb{R}$). La suite u n'étant pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq \mathrm{A}$.
La suite u étant croissante, tous les termes après le rang n_0 sont supérieurs à A, donc contenus dans I.
Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
⇝ La deuxième partie découle de la première, en considérant la suite $(-u_n)$, croissante non majorée.

Exercice 22 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0.5x^2 + x + 0.5$.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -0.5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
3. a. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
   b. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
4. Pour tout réel $e > 0$, on souhaite déterminer le rang N à partir duquel la distance entre u_n et ℓ est inférieure à e.
   a. Construire un algorithme permettant de résoudre ce problème.
   b. Programmer, puis déterminer le premier rang N associé à $e = 10^{-5}$ puis à $e = 10^{-10}$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 67-68 p 35 + **79** p 36 (Vrai-Faux)
n° 80-**81-82** p 35
n° 93-95-96-99-**100** ... p 39 (Prépa Bac)

V) Inégalités et limites

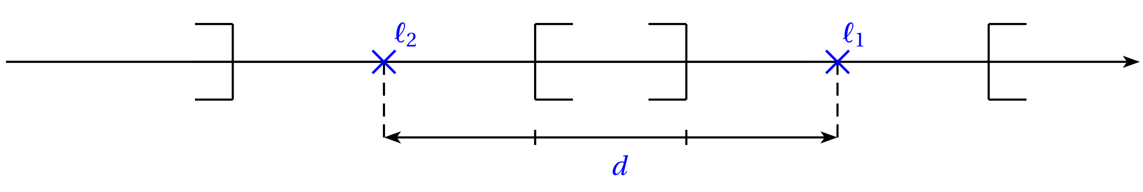
V.1. Limites finies

Propriété 3.

Soient u et v deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$ ou $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors, dans les deux cas, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Preuve
Notons ℓ_1 la limite de u, ℓ_2 la limite de v et N_0 le rang à partir duquel $u_n < v_n$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 > \ell_2$.
Notons $d = \ell_1 - \ell_2$ Par définition, l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{d}{3}$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang N_1, de même l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\frac{d}{3}$ contient tous les termes de la suite v à partir d'un certain rang.
On a le schéma suivant :



Preuve (Suite)
Par conséquent à partir de $N = max(N_0, N_1, N_2)$, on a :
⇝ $u_n < v_n$
⇝ $u_n \in I_1$ donc $u_n > \ell_1 - \frac{d}{3}$
⇝ $v_n \in I_2$ donc $v_n < \ell_2 + \frac{d}{3} < \ell_1 - \frac{d}{3} < u_n$
Ce qui est absurde. D'où $\ell_1 \leq \ell_2$.

Attention !

Le cas d'une inégalité stricte sur les termes de la suite et d'une égalité des limites est fréquent.

Exemple :

Soient u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

Alors à partir de $N_0 = 2$ on a $n^2 > n \iff \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n} \iff u_n < v_n$.

Or on sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. On est donc dans le cas où $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque : On sait qu'une suite convergente est bornée par $M \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, donc ce théorème nous indique que sa limite ℓ est telle que :

$$m \leq \ell \leq M$$

En effet, il suffit de prendre pour (v_n) la suite constante égale à M, alors on a $\ell \leq M$. On procède de même pour m.

Théorème 10. (des gendarmes)

Soit u, v et w trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que :

1. à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors v converge aussi et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Preuve

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Notons N_0 le rang à partir duquel on a $u_n \leq v_n \leq w_n$

N_1 le rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont contenus dans I et N_2 le rang à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont contenus dans I.

Notons $N = max(N_0; N_1; N_2)$, alors on a :

- ⇝ à partir du rang N, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- ⇝ D'après le point précédent, tous les termes de la suite v_n sont contenus dans I à partir du rang N, ce qui prouve que la suite (v_n) converge vers ℓ

Exercice du Cours : Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{3\cos(n)}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n + 3n^2}{n^2}$.
Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

***Solution* :**

- ⇝ On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $1 - \dfrac{3}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{3}{n^2}$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{3}{n^2}\right) = 1$.
  D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- ⇝ On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $\dfrac{-1+3n^2}{n^2} \leq v_n \leq \dfrac{1+3n^2}{n^2}$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1+3n^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3n^2}{n^2} = 3$.
  D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 75-76-**77** p 35-36 (th des gendarmes)

V.2. Limites infinies

Théorème 11. (Théorème de comparaison)

Soient u et v deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

⇝ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

⇝ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Preuve

(Exo 69 p 35 du Déclic)

⇝ Considérons A un réel. On sait que u diverge vers $+\infty$ donc à partir d'un certain rang N tous les termes de la suite u vérifient : $u_n > \mathrm{A}$.
Par conséquent, à partir du rang N, on a aussi $v_n > \mathrm{A}$, ce qui prouve que v diverge vers $+\infty$.

⇝ La deuxième démonstration est analogue.

Exercice du Cours : Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3\sin(n)$ et $v_n = -n + 1 + (-1)^n$.
Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Solution :

⇝ On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $n^2 - 3 \leq u_n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

⇝ On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(-1)^n \leq 1$ donc $v_n \leq -n + 2$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 70-71-**73** p 35 (comparaison infini)

V.3. Application à la suite (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$

Propriété 4.

1. Si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. Si $q = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
3. Si $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
4. Si $q < -1$, on a (q^n) n'admet pas de limite.

Preuve

On commence par démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli (cf p 17 du Déclic ou Exo 10 du chapitre précédent) :

$$\forall x \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a :} (1+x)^n \geq 1+nx$$

1. Si $q > 1$ alors $q = q' + 1$ avec $q' > 0$ et on a $q^n = (1+q')^n \geq 1 + nq'$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+nq') = +\infty$ car $q' > 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 (donc convergente vers 1) .
3. Si $-1 < q < 1$. On pose $q' = \dfrac{1}{|q|}$. Alors $q' > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (q')^n = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \pm \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(q')^n} = 0$.
4. Si $q \leq -1$, alors (q^{2n}) tend vers $+\infty$ tandis que (q^{2n+1}) tend vers $-\infty$.
   Donc (q^n) n'a pas de limite.

Exercice du Cours : Déterminer la limite de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° **78-84 à 87** p 37 (suites géométriques)