Chapitre 1

Vous saviez déjà que les mathématiques étaient complexes !

Hors Sujet

Titre : « Autoportrait avec cigarette (1895) » et « La madone (1895-1902) »

Auteur : Edvard Munch

Présentation succinte : Edvard Munch (1863 - 1944) est un peintre expressionniste norvégien, souvent considéré comme le pionnier de l'expressionnisme et très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Europe. L'importance de son œuvre est aujourd'hui reconnue dans le monde.
Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment *Le Cri* (1893) (cf fin du cours), pièce de la série *La Frise de la Vie*, que Munch a assemblée au tournant du siècle. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus l'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.
Munch traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au le Musée Munch dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la galerie nationale d'Oslo. L'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Enfin, la pinacothèque de Paris a organisé en 2010 la superbe exposition *Anti-Cri* regroupant de nombreux tableaux de Munch, issus de collections privées.
Le Cri et *La Madone* ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège… Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) Découverte de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ **1**
I.1. Approche ensembliste . . . 1
I.2. Approche historique . . . 2
I.3. Approche géométrique . . . 3
I.4. Formalisation . . . 3

II) Forme algébrique d'un nombre complexe **4**
II.1. Vocabulaire et première propriété . . . 4
II.2. Conjugué d'un nombre complexe . . . 6

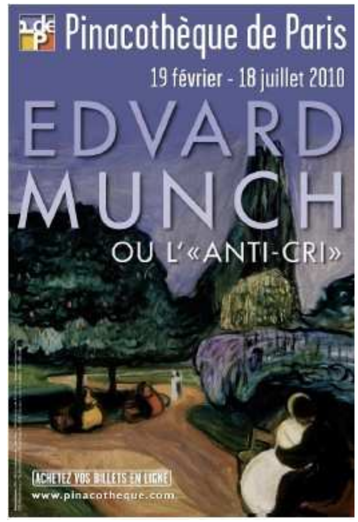
III) Equations du second degré à coefficients réels **8**
III.1. Equation $X^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$ . . . 8
III.2. Equations $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ . . . 9

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir de nouveaux nombres et les manipuler
- ⇝ Utiliser les nombres complexes pour résoudre des équations

« *La maladie, la folie et la mort sont les anges noirs qui ont veillé sur mon berceau* »
EDVARD MUNCH

VOUS SAVIEZ DÉJÀ QUE LES MATHÉMATIQUES ÉTAIENT COMPLEXES !



Résumé

Les nombres complexes, ou encore nombres imaginaires, portent bien leur nom ! Ils interviennent partout sous différentes formes et pourtant ils n'existent pas concrètement !
On les retrouve notamment en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Tantôt on les écrit sous leur forme algébrique, tantôt sous leur forme trigonométrique, tantôt leur sous forme exponentielle !
Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement des coordonnées en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons et commençons par le point de vue algébrique !

I) Découverte de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

I.1. Approche ensembliste

L'équation $x+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle admet -1 comme solution dans l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$.
De même, l'équation $3x=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ plus vaste que $\mathbb{Z}$
Et puis, l'équation $x^2=2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.
En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de vos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est $\mathbb{R}$. Pourtant l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ ...
On va donc simplement, dans ce chapitre « construire », enfin plutôt imaginer un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2=-1$ possède des solutions.

En réalité, historiquement, l'apparition des nombres complexes se fit légèrement autrement...

I.2. Approche historique

Travail de l'élève 1 :

PARTIE A. **Sur la trace des mathématiciens**

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3 + px + q = 0$, où p et q désignent des nombres réels [1] :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} \qquad \text{où} \quad \Delta = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Pour information :

- Δ est appelé le **discrimant** du polynôme $\mathrm{P}(x) = x^3 + px + q$
- Pour tout nombre a, le symbole $\sqrt[3]{a}$ désigne l'unique nombre b tel que $b^3 = a$.

Bref, easy ... Et cette formule est bien évidemment à apprendre par coeur ! [2]

1. Prenez-vous un instant pour Bombelli, mathématicien de la fin du XVI^e siècle, et appliquez cette formule à l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.
2. Quel problème survient ?
3. A l'époque, Bombelli eu l'audace de supposer, juste pour voir ce que cela donnait, que les règles de calcul usuel se prolongeaient aux racines carrés de nombres négatifs.
   Ne soyez pas si téméraires, car il est hors de question d'écrire encore des horreurs du type $\sqrt{-1}$! [3]
   Heureusement pour nous, Euler (XVIII^e) est passé depuis Bombelli, et il a décrété qu'il noterait i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
   Prenez-vous désormais pour Bombelli avec la notation d'Euler, et :
   a. Simplifier au maximum l'expression de la solution cherchée, en utilisant le nombre imaginaire i
   b. Développer et simplifier $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$
   c. Quelle serait alors une solution réelle de l'équation ? Le vérifier.
4. Déterminer a, b et c tels que $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$
5. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes, qui a mis bien longtemps à s'imposer et a déchaîné bien des passions ...

PARTIE B. **A vous de jouer !**

1. Essayez de compter un peu avec ces nombres, en simplifiant au maximum les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = (3+4i)^2 \qquad \mathrm{B} = (3-4i)^2 \qquad \mathrm{C} = (3+4i)(3-4i) \qquad \mathrm{D} = (3+4i)(i-1)$$

$$\mathrm{E} = (5-3i)(7-2i) \qquad \mathrm{F} = (i-2)(2+i) \qquad \mathrm{G} = (5+7i)(3-i)(2-3i) \qquad \mathrm{H} = \frac{6-4i}{2+3i}$$

2. Que constatez-vous ?

1. De plus, on peut démontrer que toute équation de degré 3, ie de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, est équivalente à une équation de ce type.
2. Non, je plaisante !
3. Pour tout nombre positif a, le symbole $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif b tel que $b^2 = a$. Ainsi, le symbole $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens.

I.3. Approche géométrique

Jusqu'au XIX^e siècle, les nombres complexes avaient beau avoir une utilité certaine, comme résoudre des équations de degré 3, leur existence restait très controversée.
Mais en 1806, le mathématicien suisse Argand associe les nombres complexes aux points du plan.
Ainsi, le nombre complexe $x+iy$ (x et y réels) est associé au point du plan de coordonnées $(x;y)$. Ceci entraîne notamment l'unicité de l'écriture et l'absence d'ordre dans $\mathbb{C}$.

Grâce à cette identification que vous approfondirez dans un prochain chapitre, on a pu établir une démonstration rigoureuse de l'existence de $\mathbb{C}$, en explicitant sa construction [4]. C'est la fin de la controverse ...

I.4. Formalisation

Théorème 1. (Définition-Admis)

On définit un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$:
- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2=-1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme :

$$z = x + iy \text{ avec } x \text{ et } y \text{ des nombres réels}$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes** ou encore **nombres imaginaires**.

Remarques :
- Le prolongement des opérations de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ signifie que l'on garde les propriétés calculatoires de $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, inverse ...) en remplaçant simplement i^2 par -1, à chaque fois que vous le rencontrez.
- On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{}$ qui reste réservé aux réels positifs.
- Vous constaterez l'absence d'ordre dans $\mathbb{C}$ ...
- Retenez simplement la formalisation précédente, en admettant l'existance de i, comme vous l'avez fait quand on vous a parlé des nombres négatifs, ou encore des rationnels, puis des irrationnels, mais sans pouvoir mettre d'ordre de grandeur à i ni de sens concret.

4. Cette démonstration n'est absolumment pas au programme, et même si vous pourriez en saisir quelques éléments, vous ne pourriez pas en saisir l'essence. Vos connaissances sur les ensembles et leurs propriétés étant encore trop obscures et trop peu diversifiées (il existe des ensembles par exemple, où la multiplication n'est pas commutative, comme pour les ensembles de nombres : cf les matrices en spécialité).
Une idée de cette démonstration est présente en annexe, à la fin de ce cours, pour ceux qui souhaiteraient approfondir.

Résumé historique

Dès le XVI^e siècle, plusieurs mathématiciens commencent à manipuler les nombres complexes, sans bien comprendre ce qu'ils sont et sans savoir comment les représenter. Leur existence est alors très controversée.

En 1637, **Descartes** propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est **Gauss** en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Le principal nombre complexe est un nombre imaginaire dont le carré vaut -1.
Jusqu'au XVIII^e siècle (pendant plus de 200 ans !), on notera avec réticence ce nombre $\sqrt{-1}$. Mais en 1777, **Euler**, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) pour le nombre qui vérifie $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels. Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conservées.

L'équation $x^2 = -1$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$ car :

$$x^2 = -1 \iff x^2 - (-1) = 0 \iff x^2 - i^2 = 0 \iff (x+i)(x-i) = 0 \iff x = i \text{ ou } x = -i$$

On sait qu'il n'existe pas d'autres solutions dans un ensemble encore plus grand, notamment grâce à l'écriture factorisée (même si la démonstration est bien plus ardue que cela).
En fait c'est le cas de toutes les équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{C}$: elles admettent toutes leurs solutions dans $\mathbb{C}$ (en fait, autant que le degré de l'équation). On dit que $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.
Ainsi, je vous rassure, on ne construira pas d'ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{C}$.

Ce n'est cependant qu'au XIX^e siècle que les nombres imaginaires prennent leur statut officiel de nombres, grâce au suisse **Argand** qui proposa une représentation géométrique de ces nombres.

Ces nombres ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A votre niveau, ils sont utiles pour la résolution d'équations et en géométrie dans un second chapitre.

II) Forme algébrique d'un nombre complexe

II.1. Vocabulaire et première propriété

Définition 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe deux nombres réels x et y tels que $z = x + iy$.
- L'écriture $x + iy$ (unique) est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z
- Le réel x est la **partie réelle** de z et se note $\text{Re}(z)$
- Le réel y est la **partie imaginaire** de z et se note $\text{Im}(z)$

Attention !

La partie imaginaire est un **nombre réel** .

Exemples :

Si $z = 3-4i$ alors 3 est sa partie réelle et -4 est sa partie imaginaire [a].

Soit $z' = 2+3i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z+z'$.
2. Donner les parties réelle et imaginaire de zz', puis de $iz-3z'$

a. Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ? Parce qu'elle possède une partie réelle et une partie imaginaire ...

Remarques :

- $\rightsquigarrow$ Si $\mathrm{Im}(z)=0$ alors $z = \mathrm{Re}(z)+i0 = \mathrm{Re}(z)$, donc z est un réel et $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
- $\rightsquigarrow$ Si $\mathrm{Re}(z)=0$ alors $z = 0+i\mathrm{Im}(z) = i\mathrm{Im}(z)$. On dit que z est un **imaginaire pur**.
  L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Théorème 2. (Egalité de deux nombres complexes)

Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors :

$$x+iy = x'+iy' \Longleftrightarrow x=x' \text{ et } y=y'$$

Autrement dit : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

Preuve

$\rightsquigarrow$ Montrons dans un premier temps que

$$x+iy=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0$$

$\Leftarrow$) Si $x=0$ et $y=0$ alors $x+iy=0$

$\Rightarrow$) Supposons que $y\neq 0$, dans ce cas on a : $i = -\dfrac{x}{y}$ et par conséquent $i\in\mathbb{R}$, or il n'existe pas de nombres réels tels que $i^2=-1$. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que $y=0$ et donc $x+0=0 \Longleftrightarrow x=0$

$\rightsquigarrow$ Considérons désormais deux nombres complexes $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ tels que et montrons que

$$z=z' \Longleftrightarrow x+iy=x'+iy' \Longleftrightarrow x=x' \text{ et } y=y'$$

$\Leftarrow$) Si $x=x'$ et $y=y'$ alors de manière évidente $z=z'$

$\Rightarrow$) Si $z=z'$ montrons que $x=x'$ et $y=y'$

Comme $z=z'$, on a $z-z'=0 \Longleftrightarrow x-x'+i(y-y')=0$, par conséquent d'après la première partie de la démonstration :

$$x-x'=0 \Longleftrightarrow x=x' \qquad \text{et} \qquad y-y'=0 \Longleftrightarrow y=y'$$

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion d'ordre, on ne pourra donc pas comparer deux nombres imaginaires.

Exercice 1 : Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La partie réelle de $2i-3$ est -3.
2. La partie imaginaire de $4+5i$ est $5i$.
3. Les entiers naturels sont des nombres complexes.
4. $(1+i)^2$ est un imaginaire pur.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, déterminer les parties réelles et imaginaires du nombre z.

1. $z=(3-i)^2$ **2.** $z=(2i-1)(3+i)$ **3.** $z=3i(1+i)-5(2-3i)$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. *On donnera les solutions sous forme alégbrique.*

1. $3z+2-i=z+5+4i$ **2.** $(1+i)z=3-2i$ **3.** $-1-z^2=0$

Exercice 4 : **Equation produit dans $\mathbb{C}$**

1. Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$. Justifier que $0\times z=0$.

2. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1\times z_2=0$.

a. Démontrer que si $z_1\neq 0$ alors $z_2=0$.
On pourra utiliser l'inverse de z.

b. Formuler la propriété ainsi démontrée.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z^2-4)(z^2+4)=0$

II.2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.

On considère un nombre complexe $z=x+iy$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que

$$\overline{z}=x-iy$$

On dit que z et $\overline{z}$ sont des **nombres complexes conjugués**.

Exemple :

Le conjugué de $z=4-2i$ est $\overline{z}=4+2i$, le conjugué de i est $-i$, de 7 est 7.

Remarque : On a Re(z) =Re($\overline{z}$)

Corollaire 1. (Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur))

On a :

$$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z) \qquad z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel} \iff z=\overline{z} \qquad \text{et } z \text{ est imaginaire pur } \iff z=-\overline{z}$$

Preuve **ROC**

Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\text{Re}(z) \text{ et } z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\text{Im}(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \iff \text{Im}(z) = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \iff \text{Re}(z) = 0 \iff z + \overline{z} = 0 \iff z = -\overline{z}$$

Théorème 3.

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a : $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$

Preuve **ROC**

$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2$

Application

Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $x + iy$, i.e sous la forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemple :

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. *On donnera les solutions sous forme alégbrique.*

1. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$ **2.** $z + 2i = iz - 1$ **3.** $(3+2i)(z-1) = i$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 40 p 241

Propriété 1.

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

2. $\overline{-z} = -\overline{z}$

3. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

4. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

5. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

***Preuve* ROC**

Soit $z = x + iy$ et $z' = x - iy$ (avec x, y, x' et y' réels), et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y')$$

$$\overline{z}+\overline{z'} = \overline{x+iy}+\overline{x'+iy'} = x-iy+x'-iy' = x+x'-i(y+y')$$

Par conséquent $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$.

On démontre de manière similaire les autres égalités, avec une petite récurrence pour la quatrième.

Exemples :

Déterminer les formes algébriques des conjugués des nombres complexes suivants :

$$z = \frac{4-5i}{3+i} \qquad\qquad z = \frac{1}{2+i}$$

Application

Si un polynôme, à coefficients réels, admet un nombre complexe z comme racine alors $\overline{z}$ est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) :

$$\mathrm{P}(\bar{z})) = \overline{\mathrm{P}(z)}$$

Et donc si $\mathrm{P}(z) = 0$ alors $\mathrm{P}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{P}(z)} = \overline{0} = 0$

Exemples :

On donne $\mathrm{P}(x) = x^2+1$. Déterminer les racines de P et vérifier qu'elles sont conjuguées.

Vérifier que le nombre complexe $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est racine de $\mathrm{Q}(x) = x^2+x+1$.

Donner sans calcul l'autre racine de Q. En déduire sa forme factorisée.

III) Equations du second degré à coefficients réels

III.1. Equation $\mathrm{X}^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

***Travail de l'élève* 2.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{X}^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les solutions de l'équation $\mathrm{X}^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.
2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -3$.
   - **a.** Vérifier que $i\sqrt{3}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
   - **b.** En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{X}^2 = a$ dans le cas $a < 0$.
   - **a.** Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.
   - **b.** En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Proposition 1.

L'équation $X^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:
⇝ Si $a \geq 0$ ce sont les réels suivants : $X = \sqrt{a}$ ou $X = -\sqrt{a}$
⇝ Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $X = i\sqrt{-a}$ ou $X = -i\sqrt{-a}$

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + \frac{3}{4} = 0 \qquad z^2 = \cos^2\theta - 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 0$$

III.2. Equations $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Travail de l'élève **3.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$.

1. Rappeler le discriminant Δ de cette équation, ainsi que les solutions de l'équation $ax^2 + b + c = 0$ dans le cas où $\Delta \geq 0$.

2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

a. Calculer le discriminant Δ de cette équation. Quel problème survient ?

b. Ecrire Δ sous la forme d'un carré de nombre complexe.

c. Vérifier que le nombre $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ est solution de l'équation considérée.

d. Quelle est alors l'autre solution de l'équation ?

3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas le discriminant Δ est strictement négatif.

On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire de manière équivalente $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

a. Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

b. En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, résoudre alors l'équation considérée.

Théorème 4.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède deux solutions dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues :
⇝ Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

⇝ Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple :
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$

Exercice 6 : Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'équation $z^2 - z - 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$
2. L'équation $z^4 - 1 = 0$ a quatre solutions dans $\mathbb{C}$
3. L'équation $z^4 - 1 = 0$ a quatre solutions dans $\mathbb{R}$
4. Pour tout nombre complexe z, $2z^2 + 6z + 5 = (z + 1.5 - 0.5i)(2z + 3 + i)$

Exercice 7 : a, b et c sont des réels et a est différent de 0.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$
2. Si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, alors $z_1 = \overline{z_2}$
3. Si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, alors $az^2 + bz + c = a(z + z_1)(z + z_2)$
4. Pour tout nombre complexe z, $2z^2 + 6z + 5 = (z + 1.5 - 0.5i)(2z + 3 + i)$

Exercice 8 : Si n est un entier naturel non nul, on dit que le nombre complexe z est une racine n-ième de l'unité si on a : $z^n = 1$

1. si $n = 3$.
   a. Déterminer une racine évidente dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$
   b. Justifier que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$
2. si $n = 4$.
   a. Déterminer deux racines évidentes dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(az^2 + bz + c)$
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

Exercice 9 : On pose $\mathrm{P}(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + \alpha z - 13i$, où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $\mathrm{P}(i) = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z, $\mathrm{P}(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z + z' = 5 \\ zz' = 6.5 \end{cases}$

Exercice 11 : On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

1. Démontrer que (E) a une solution imaginaire pure.

2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 + az + b)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12 : On définit la fonction polynôme f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
On pourra poser $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, puis mettre $f(iy)$ sous forme algébrique et enfin traduire la nullité de $f(iy)$ par un système.

2. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 44-47 p 241