## Chapitre 13

# Nul n'est censé ignorer les lois continues

## Hors Sujet

Document réalisé à l'aide de LaTeX
**Auteur** : C. Aupérin
**Site** : wicky-math.fr.nf
**Lycée Jules Fil** (Carcassonne)

**Titre** : « Laurence Anyways »

**Auteur** : Xavier Dolan

**Présentation succinte** : Laurence Anyways est un film franco-québécois, un mélodrame, écrit et réalisé par Xavier Dolan, sorti en 2012.

Le film a reçu le prix de meilleur film canadien au festival international du film de Toronto et le grand prix au festival du film de Cabourg, ainsi que le Prix collégial du cinéma québécois en 2013. C'est l'histoire d'un impossible amour entre un homme et une femme après que celui-ci ait décidé de changer de sexe dans les années 90.

Le jour de ses trente ans, Laurence annonce à Fred qu'il veut devenir une femme et lui demande de l'accompagner dans sa transformation. Pour Fred, c'est un coup de tonnerre, mais elle décide malgré tout de donner une chance à leur couple.

Face aux jugements et à l'incompréhension, Laurence et Fred vont tout faire pour préserver leur amour hors du commun.

Xavier Dolan, né le 20 mars 1989 à Montréal,se fait connaître en tant que scénariste et réalisateur lors de la projection de son premier long métrage : « J'ai tué ma mère » à la 41e Quinzaine des réalisateurs, au cours de la 62e édition du Festival de Cannes. Il y gagne trois prix et les trois jurys soulignent le caractère unique de sa réalisation, la vérité, la violence et la poésie de la langue, ainsi que l'acharnement du jeune cinéaste et la foi en ses projets.

## Table des matières



**L'ESSENTIEL :**

- ⇝ Découvrir les univers infinis et les lois continues
- ⇝ Connaître trois lois continues
- ⇝ Approximer une loi binomiale par une loi normale
- ⇝ Déterminer des probabilités de la loi normale à la calculatrice
- ⇝ Raisonner par considérations géométriques pour trouver des probabilités de loi normale

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

# CHAPITRE 13:

# NUL N'EST CENSÉ IGNORER LES LOIS CONTINUES

**Résumé**

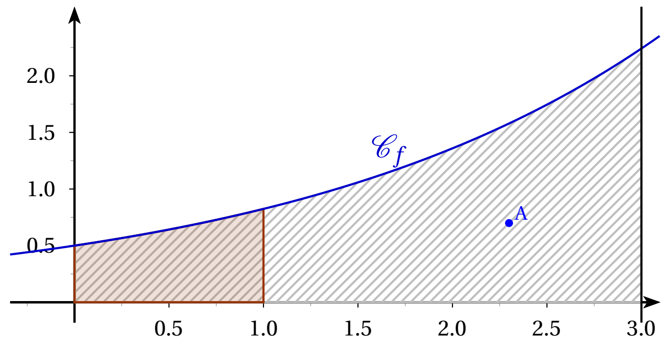
Si une variable aléatoire X prend un nombre de valeurs fini ou dénombrable (son ensemble de définition est inclus dans N), on parle de variable discrète. C'est le seule cas que vous avez étudié jusqu'à présent.
Mais il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle réel (borné ou non). Par exemple, le temps d'attente d'un bus, la durée de vie d'un appareil, la distance d'un point d'impact au centre d'une cible.... Dans ce cas, on dit alors que la variable est continue. Il ne s'agira alors plus de calculer une probabilité d'apparition d'une valeur donnée mais d'un intervalle. On s'intéressera donc à des événements du type X entre les réels $a$ et $b$, $X \geq a$ ou encore $X \leq b$. Daniel Bernoulli fut un pionnier en la matière.
Vous constaterez dans ce chapitre que ce chapitre mobilisera vos connaissances acquises dans le chapire sur l'intégration, ce qui sera un bon moyen pour vous de réviser si vous n'êtes pas encore au point.

Les probabilités continues permettent de modéliser des phénomènes extrêmement différents. Elles apparaissent au même moment que les probabilités modernes, autour de mathématiciens comme Abraham De Moivre (1667-1754). Mais c'et Gauss (1777-1855) qui donne son nom à la courbe liée à la loi normale et qui la relie en particulier au problème des observations astronomiques.
Les lois continues se sont multipliées depuis (loi exponentielle, loi de Weibull, loi de Pareto ...), ouvrant un champs immense d'applications et de recherches ...

## I ) Loi à densité sur un intervalle

### I.1. Du discret au continu

**Travail de l'élève 1** : Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
L'expérience consiste à choisir un point au hasard dans le domaine $\mathscr{D}$ grisé ci-dessous, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.
On cherche à la probabilité que le point choisi appartienne à une certaine zone.




1. **Premier constat** :
   Est-il plus probable que le point choisi ait une abscisse entre $0$ et $1$ ou entre $2$ et $3$ ?
2. **Calculs de certaines probabilités**
   - **a.** Quelle est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ ?
   - **b.** Quelle est la probabilité que le point appartienne à la zone $\mathscr{Z}$ délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ ?
   - **c.** Même question avec les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
   - **d.** Qu'obtient-on si $a=b$ ? Qu'en pensez-vous ?
   - **e.** Déduire la probabilité de choisir le point A.
3. **Tentative de Modélisation**
   - **a.** Quel est l'univers de cette expérience ?
   - **b.** En quoi se distingue-t-il des univers déjà rencontrés ?

**Remarque :** On peut constater que cette expérience consiste en fait à choisir un réel $X \in [0;3]$ avec n'importe quel $Y \in [0; f(x)]$.

**Définition 1.**

Lorsqu'une variable aléatoire peut prendre toutes ses valeurs dans un ensemble dénombrable, on dit que sa loi est **discrète**.
Lorsqu'une variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non), on dit que sa loi est **continue**.

## Exemples :

Le temps d'attente d'un bus, la durée de vie d'un appareil, la distance d'un point d'impact au centre d'une cible....

## I.2. Densité sur un intervalle

**Définition 2.**

On appelle densité de probabilité sur un intervalle $\mathrm{I}$ toute fonction $f$ **continue et positive** sur $\mathrm{I}$ telle que :

$$\boxed{\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = 1}$$

**Remarques :**

⇝ — Si $\mathrm{I} = [a;b]$, le nombre $\int_{\mathrm{I}} f(x)dx$ est défini par : $\int_a^b f(x)dx$ .

— Si $\mathrm{I}$ est un intervalle non borné, par exemple $[a,+\infty[$, alors la quantité notée $\int_{\mathrm{I}} f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

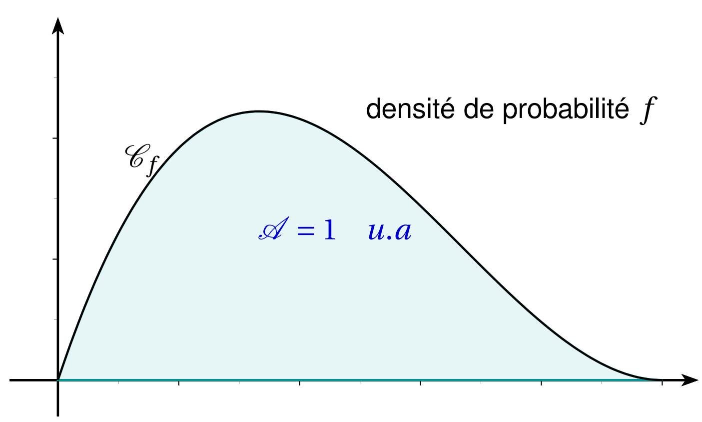
De la même manière si $\mathrm{I} = ]-\infty;a]$ alors la quantité notée $\int_{\mathrm{I}} f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$$

— Enfin si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ alors la quantité notée $\int_{\mathrm{I}} f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la somme des limites suivante :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$$

⇝ La fonction densité affecte ainsi « plus ou moins de « poids » à la probabilité d'un intervalle donné. L'objectif du chapitre est de déterminer des probabilités d'intervalles en fonction de cette densité.



## Exemple :

La fonction $f$ définie sur $[1;e]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est une densité sur $[1;e]$.
En effet, $f$ en plus d'être continue et positive vérifie :

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

**Exercice du Cours** :

1. Déterminer le nombre réel $\alpha$ tel que la fonction $f$ définit par $f(x)=x+\alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0;1]$.
2. Soit $f$ une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$). Quelle doit être la valeur de la constante $\gamma$ pour qu'elle soit une densité sur $[a;b]$ ?
3. Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Démontrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

## *Solution* :

1. On doit avoir $\displaystyle\int_0^1 x+\alpha dx = 1 \iff \left[\frac{x^2}{2}+\alpha x\right]_0^1 = 1 \iff \frac{1}{2}+\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}$
2. On doit avoir $\displaystyle\int_a^b \gamma dx = 1 \iff [\gamma x]_a^b = 1 \iff \gamma(b-a) = 1 \iff \gamma = \frac{1}{b-a}$
3. Calculons dans un premier temps : $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x}+e^0 = 1-e^{-\lambda x}$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-\lambda x} = 1$$

Ainsi on vient de montrer que :

$$\int_I f(t)dt = 1$$

ce qui implique que $f$ est une densité de probabilité.

## I.3. Loi de probabilité

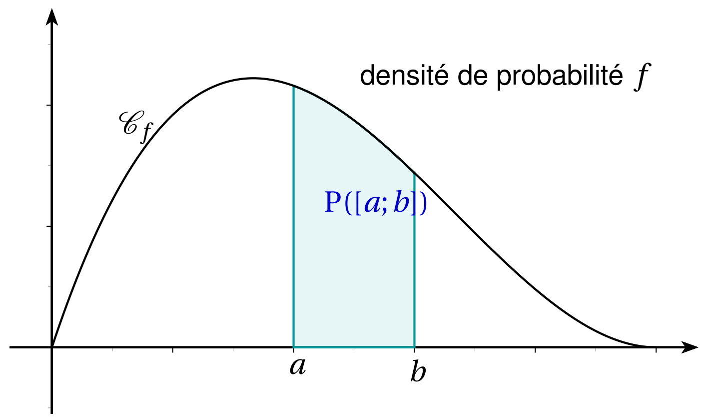
**Proposition 1.**

Soit $\mathrm{I}$ un intervalle et $f$ une densité de probabilité sur $\mathrm{I}$. L'application $\mathrm{P}$ qui, à tout sous-intervalle $[a,b]$ de $\mathrm{I}$ associe la quantité :

$$\mathrm{P}([a;b]) = \int_a^b f(t)\,dt$$

est appelée loi de probabilité sur $\mathrm{I}$.

Illustration :




**Remarques :**

- $\mathrm{P}([a;b])$ n'est rien d'autre que l'aire du domaine représenté ci-dessus.
- Notons que, puisque $f$ est une densité de probabilité sur $\mathrm{I}$, on a : $\mathrm{P}(\mathrm{I}) = 1$ et $0 \leq \mathrm{P}([a;b]) \leq 1$. Quand on modélisera une expérience aléatoire, $\mathrm{I}$ représente l'univers de notre expérience.
- Un résultat étonnant : pour tout réel $x_0$ de $\mathrm{I}$ on a :

$$\mathrm{P}(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

i.e que l'éventualité $x_0$ est un résultat **possible** de l'expérience de probabilité **nulle**, c'est ici une différence fondamentale avec le cas discret.

Prenons un exemple, si on choisit un nombre au hasard entre $0$ et $1$, la probabilité que l'on choisisse par exemple $\frac{1}{3}$ est nulle même si l'événement peut avoir lieu.

Toujours dans cette même expérience la probabilité de choisir un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$ semble naturellement égale à $\frac{1}{2}$ i.e

$$\mathrm{P}([0;0.5]) = \int_0^{0.5} f(t)\,dt = \frac{1}{2} \qquad \text{où } f \text{ reste à déterminer.}$$

Nous allons dans le paragraphe suivant déterminer quelle est la densité de probabilité la plus à même de modéliser une telle expérience.

⇝ Ainsi

$$P\big(]a;b[\big) = P\big([a;b[\big) = P\big(]a;b]\big) = P\big([a;b]\big)$$

⇝ Grâce aux propriétés de l'intégrale, on retrouve les trois règles de définitions d'une probabilité :

1. $P \in [0;1]$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous événements $A$ et $B$ disjoints.

Et même pour tout sous intervalle $A \subset I$ on a $P\big(\overline{A}\big) = 1 - P(A)$

### Exemple :

La fonction $\begin{array}{rccc} f & : & [-1;7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{8} \end{array}$ est une densité de probabilité sur $[-1;7]$

Auqel cas il suit que $P(]2,7]) = \displaystyle\int_2^7 \frac{1}{8} dt = \frac{5}{8}$

*La loi associée à cette densité s'appelle* ***la loi uniforme sur*** $[-1;7]$.

*Elle modélise le choix aléatoire d'un réel dans l'intervalle* $[-1;7]$ *puisque les réels sont uniformément répartis.*

## I.4. Variable aléatoire continue

Sont dites continues les variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle $I$.

**Définition 3.**

Soit une loi de probabilité $P$ de densité $f$ sur un intervalle $I$.
On dit qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $I$ suit la loi de probabilité $P$ si :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt \qquad \forall a, b \in I$$

**Exercice du Cours** :

1. Montrer que $f$ est la densité d'une loi de probabilité $P$ avec :

$$I = [0;1] \qquad \text{et} f(x) = 2x$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $I$ qui suit la loi de probabilité $P$, déterminer $P\left(\dfrac{1}{4} \leq X \leq \dfrac{3}{4}\right)$
3. Le résultat précédent permet-il d'envisager que $P$ modélise le choix d'un nombre au hasard entre $[0;1]$ ?
4. Déterminer $P\left(\dfrac{1}{2} \leq X \leq \dfrac{3}{4}\right)$.
5. Que penser du résultat précédent ?

**Solution :**

1. On a :
$$\int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1-0 = 1$$
ce qui montre que $f$ est la densité d'une loi de probabilité $\mathrm{P}$.
2. On a :
$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} \leq \mathrm{X} \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$
3. oui.
4. $$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leq \mathrm{X} \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$
5. Cette loi de probabilité ne modélise pas l'expérience consistant à choisir un nombre au hasard entre $0$ et $1$, en effet le résultat attendu à la question précédente est $\frac{1}{4}$.

**Définition 4.**

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire $\mathrm{X}$ suivant une loi de probabilité de densité $f$ sur $\mathrm{I}$ sont définies par :

$$\mathrm{E(X)} = \int_a^b t f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V(X)} = \mathrm{E}\left(\left(\mathrm{X} - \mathrm{E}(x)\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X})$$

**Remarque :** La probabilité conditionnelle et l'indépendance sont définies de la même manière que dans le cas discret :

$$\mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B} \text{ sont indépendants } \iff \mathrm{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

**Exercice du Cours** : Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30. On s'intéresse à l'heure d'arrivée $\mathrm{T}$ d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.
On admet que $\mathrm{T}$ suit la loi de probabilité de densité $f : x \longmapsto |x - 8.5|$ sur l'intervalle $\mathrm{I} = [7.5; 9.5]$.

- Tracer la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'intervalle $\mathrm{I}$.
- Vérifier que la fonction $f$ est une densité de probabilité sur $[7.5; 9.5]$.
- Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 9h00 et 9h30.
- En déduire la probabilité que le camion arrive avant 9h00.
- Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00.
- Calculer l'espérance de la variable $\mathrm{T}$.

**Exemple :**

La fonction $f$ définie sur sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\exp^{-3t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Si X suit une loi de densite $f$ sur $\mathbb{R}^+$ alors $P(0 \leq X \leq 0.25) = ...$

et $P(0 \leq X \leq t) = ...$ pour tout $t$ positif.

Ainsi $P(X \geq t) = ...$

*La loi associée à cette densité s'appelle **la loi exponentielle de paramètre 3**.*

# II ) Deux exemples de lois continues

## II.1. La loi uniforme sur $[a; b]$

**Travail de l'élève 2** : Soit $f$ une fonction constante sur un intervalle $I = [a; b]$ .

1. Quelle doit être sa valeur pour que $f$ soit une densité sur cet intervalle ?
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f$ sur $[a, b]$. Calculer $P(0 \leq X \leq 0.25)$ puis $P(c \leq X \leq d)$ pour tout $c \leq d$ appartenant à I.
3. Calculer l'espérance de X.

**Définition 5.** (proposition)

On appelle **loi uniforme** sur $I = [a; b]$, la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante $f$ définie sur I par

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

***Preuve***

$\int_a^b \frac{1}{b-a} dt = [\frac{t}{b-a}]_a^b = 1.$

$f$ est bien une densité sur $[a; b]$.

**Proposition 2.**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $\Omega = [a; b]$. Pour tout sous-intervalle de I du type $[c; d]$ on a :

$$P\big(X \in [c; d]\big) = \frac{d-c}{b-a}$$

L'espérance de X est :

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}$$

**Remarques :**

- La loi uniforme modélise le choix aléatoire d'un nombre réel $X$ de l'intervalle $\Omega$, tous les nombres ayant le même « poids », autrement dit les nombres étant **uniformément** répartis.
- La probabilité d'un intervalle $I \subset \Omega$ est proprotionnelle à sa taille.

***Preuve***

Cf Activité.

Pour tout $c \leq d$ de l'intervalle $[a;b]$ on a $P\big(X \in [c;d]\big) = \int_c^d f(t)dt = \dfrac{d-c}{b-a}$

Enfin $E(X) = \int_a^b t \times \dfrac{1}{b-a}dt = \left[\dfrac{1}{2(b-a)} \times t^2\right]_a^b = \dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$

**Exemple :**

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.

Soit $X$ le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que $X$ suit la loi uniforme sur $[0;6]$.

Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

## II.2. La loi exponentielle de paramètre $\lambda$

**Travail de l'élève 3** : Soit $f$ une fonction exponentielle définie sur un intervalle $I = [0;+\infty[$ du type $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$ un réel fixé.

1. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $f$ est une densité sur $I$.
2. On note désormais $T$ la variable aléatoire qui suit la loi de densité $f$ sur $I$.
   - **a.** Calculer $P(5 \leq T \leq 10)$.
   - **b.** Calculer $P(T \leq 15)$. En déduire $P(T \geq 15)$.
   - **c.** Pour tout réel $c \in I$ , calculer $P(T \leq c)$ et en déduire $P(T \geq c)$.
   - **d.** Pourquoi ne pouvez-vous pas calculer l'espérance de $T$ ?
   - **e.** i. Déterminer les réels $c$ et $d$ tels que la fonction

$$G : t \longmapsto (ct+d)e^{-\lambda t}$$

soit une primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto \lambda \times te^{-\lambda t}$.

ii. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la valeur de l'intégrale $\int_0^x tf(t)dt$.

iii. Déterminer alors $E(T)$.

**Définition 6.** (Proposition)

Soit $\lambda > 0$ un réel.

On appelle **loi exponentielle de paramètre** $\lambda$ la loi de probabilité dont la densité est la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

***Preuve***

Cf Activité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1.$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1.$

$f$ est bien une densité sur $\mathbb{R}^+$.

**Propriété 1.**

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $a \geq 0$ on a :

- $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} < a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} > a) = e^{-\lambda a}$
- $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$

***Preuve***

Cf activité.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ on a $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} < a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^{-\lambda 0} 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} > a) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \leq a) = e^{-\lambda a}$
- **Type ROC :** Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par

$$\mathrm{G}(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$$

alors

$$\mathrm{G}'(t) = -\left(e^{-\lambda t} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) \times \left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\right) = t \times \lambda e^{-\lambda t} = t f(t)$$

Ainsi

$$\mathrm{G}'(t) = t f(t) \iff \int_0^x t f(t) dt = [\mathrm{G}(t)]_0^x = -\left(\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Donc $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$

**Remarque :** La loi exponentielle modélise des durées de vie particulière.

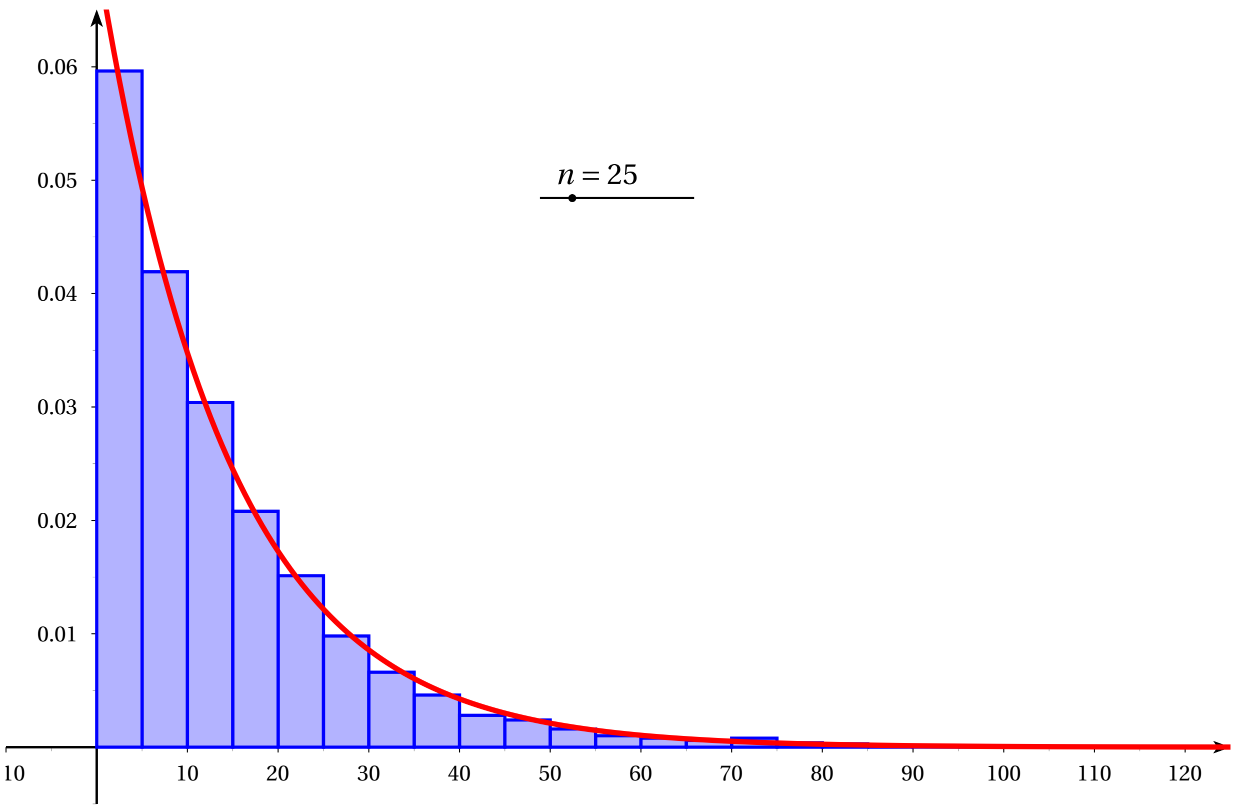
**Exemple :**

On considère un matériel électronique dont le temps de fonctionnement exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire $T$ prenant ses valeurs dans $[0;+\infty[$.

On a regardé $5000$ temps de fonctionnement de ce matériel et on a regroupée les données en classes d'amplitude $5$ unité de temps.

Il n'y a aucun appareil qui a duré plus de 125 semestres. On a donc 25 classes.

Sur Géogébra, on a alors réalisé l'histogramme associé à cet échantillon, ainsi que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = 0.07e^{-0.07t}$.




On constate que la forme globale de l'histogramme ressemble à celle de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Si l'on diminue l'amplitude des classes, elle s'en rapproche encore plus.

*On rappelle que sur un histogramme, les probabilités sont données par les aires des rectangles.*

Ainsi avec l'histogramme on trouve $P(T \le 5) \simeq 0.059 \times 5 = 0.295$ et $P(5 \le T \le 15) \simeq 0.042 \times 5 + 0.03 \times 5 = 0.36$

Avec la fonction densité on trouve :

$$P(T \le 5) = \int_0^5 f(t)\,dt = \int_0^5 0.07e^{-0.07t}\,dt = \left[-e^{-0.07t}\right]_0^5 = 1 - e^{-0.35} \simeq 0.295$$

$$P(5 \le T \le 15) = \int_5^{15} f(t)\,dt = \int_5^{15} 0.07e^{-0.07t}\,dt = \left[-e^{-0.07t}\right]_5^{15} = e^{-0.35} - e^{-1.05} \simeq 0.355$$

**Exercice du Cours** : On suppose que la durée de vie $X$ d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $0.1$.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dure entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
3. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.
   Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
4. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans.
   *On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge. On dit que X est une loi de durée de vie* ***sans vieillissement****.*

**Propriété 2.**

Soit $T$ est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels $t$ et $h$ strictement positifs, on a :

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$$

***Preuve***

Pour tous réels positifs $t$ et $h$ on a $P(T \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.
On a $P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \dfrac{P\big((T\geq t)\cap(T\geq t+h)\big)}{P(T\geq t)} = \dfrac{P\big(T\geq t+h\big)}{P(T\geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T\geq h)$

**Remarque :** Cette propriété s'appelle « durée de vie sans vieillissement », car elle montre que la durée de vie $T$ sur un laps de temps $h$, ne dépend pas de l'âge $t$ à partir duquel on considère cet événement.
On parle aussi de **loi sans mémoire**.
Les lois exponentielles modélisent des phénomènes dont la durée de vie n'est pas affectée par l'âge, comme par exemple celle d'un atome radioactif, ou celle de certaines tribus (dont les maladies et autres n'entraînent que des morts non dues à l'âge des personnes), etc

# III ) Approximation de la loi binomiale centrée réduite par une loi continue

## III.1. Standardiser des variables aléatoires

**Travail de l'élève 4** : En Syldavie, la proportion de personnes pratiquant la danse sous-marine en scaphandre est $p = 0.35$.

On prélève au hasard un échantillon de taille $n$ dans la population Syldave (celle-ci étant assez grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).

On désigne par X la variable aléatoire associant à un échantillon de taille $n$ le nombre de syldaves de l'échantillon pratiquant la danse sous-marine en scaphandre (DSMS).

1. **a.** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   **b.** Déterminer en fonction de $n$, l'espérance $\mu$ et l'écart-type $\sigma$ de X.

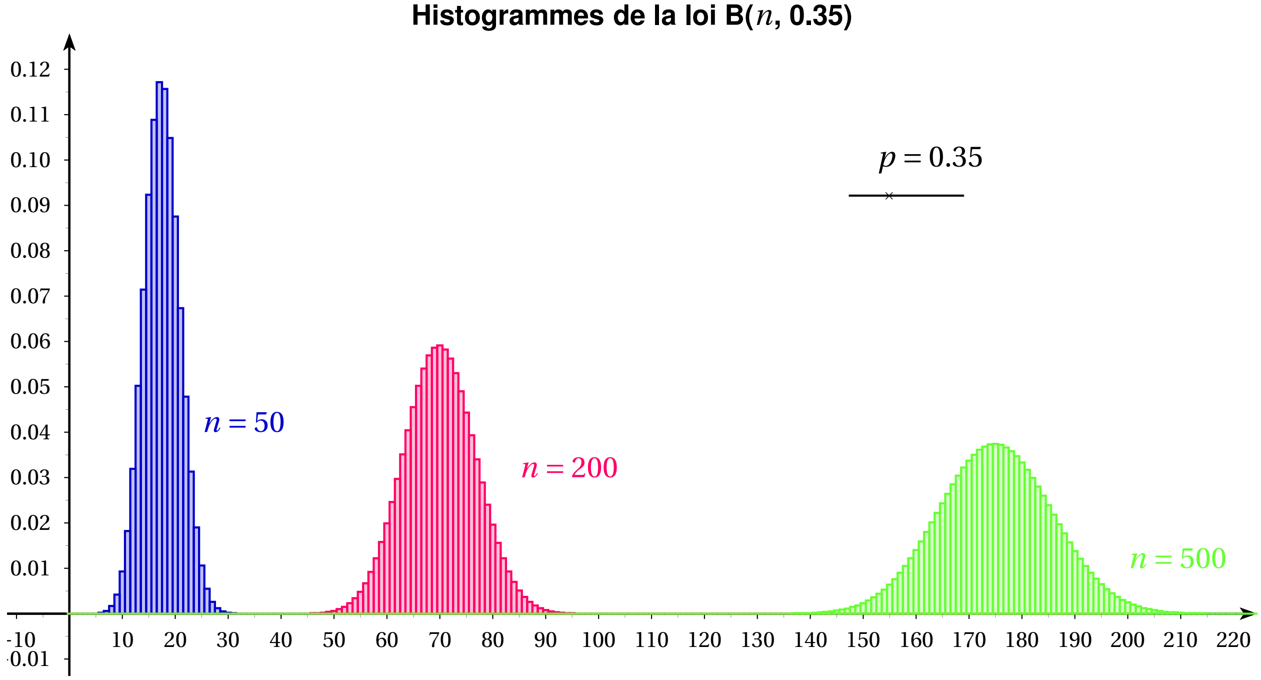
   **c.** Norbert a prélevé un échantillon de 50 Syldaves et a obtenu 21 syldaves pratiquant la DSMS.
   Simone, sur un échantillon de taille 200, a obtenu 79 syldaves pratiquant la DSMS.
   Fabrice quant à lui a obtenu sur un échantillon de 500 syldaves, 151 pratiquant la DSMS.
   A votre avis, lequel des trois a l'échantillon le plus représentatif de la population Syldave ?

2. On a représenté les histogrammes de la loi $B(n, 0.35)$ pour les trois valeurs de $n$ précédentes.

   **a.** Que se passe-t-il lorsque $n$ varie ?

   **b.** Quelle est la somme des aires des rectangles pour un $n$ donné ?

**Histogrammes de la loi B($n$, 0.35)**




*On rappelle que dans un histogramme, les probabilités de chaque valeur possible pour X sont données par* ***une aire de rectangle*** *: l'aire de chaque rectangle centré autour d'une valeur $k$ vaut $P(X = k)$.*

**Quand $n$ varie, on obtient des histogrammes qui diffèrent par leurs positions et par leurs dispersions.**

**Conclusion**

Les distributions de probabilité de deux variables aléatoires peuvent être très différentes, notamment en raison de la disparité de leur espérance ou de leur écart-type.

Il est alors difficile de les comparer.

En centrant et en réduisant les variables, on les rend indépendantes de l'unité choisie pour leurs valeurs, avec une espérance et un écart-type de standardisés de $0$ et $1$.

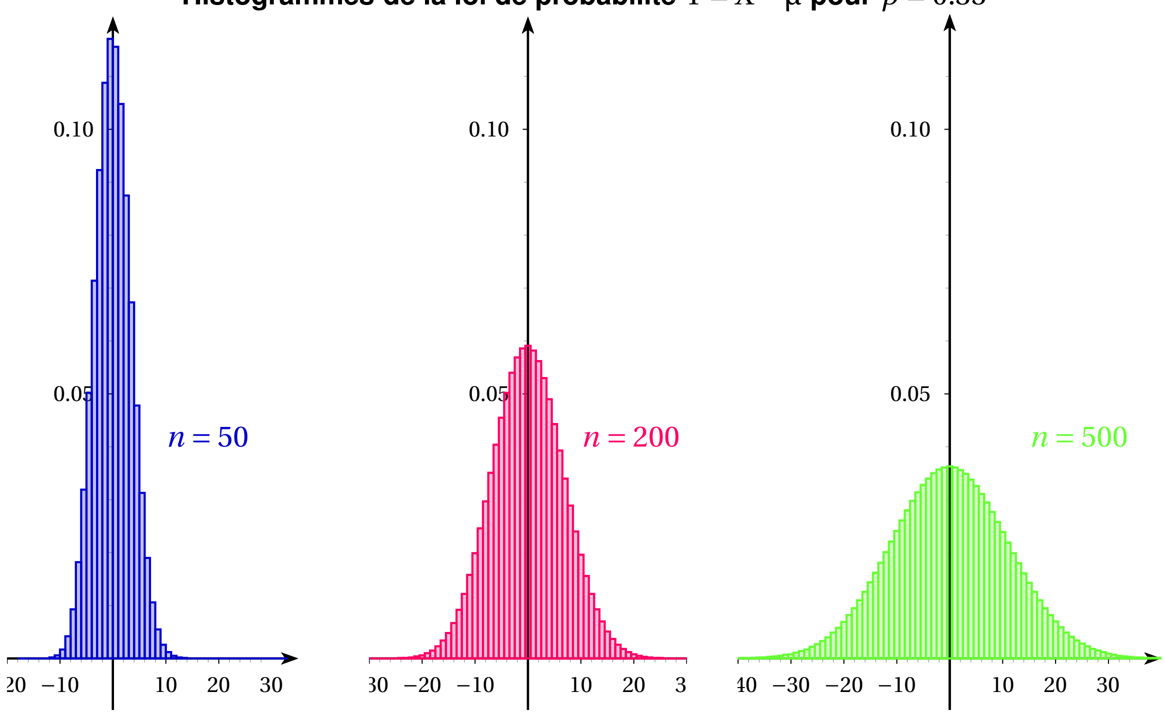
La comparaison de plusieurs variables aléatoires s'en trouve ainsi facilitée.

## III.2. Centrer l'histogramme d'une loi binomiale

**Travail de l'élève 5** : On reprend le contexte de l'activité précédente et on considère la variable aléatoire $Y = X - \mu$.

1. Déterminer $y$ tel que $P(X = k) = P(Y = y)$.
2. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. **Pour cette raison on dit que la variable $Y$ est centrée.**
3. On a représenté les histogrammes de la loi de $Y$ pour les trois valeurs de $n$ précédente.
   - **a.** Expliquer. **Valeurs prises par $Y$ ? écart entre deux valeurs consécutives de $y$ ? hauteur des rectangles : $P(X = k) = P(Y = y)$ pr un $y = k - \mu$**
   - **b.** Que se passe-t-il lorsque $n$ varie ?
   - **c.** Quelle est la somme des aires des rectangles pour un $n$ donné ?

**Histogrammes de la loi de probabilité $Y = X - \mu$ pour $p = 0.35$**




**On constate que dans $n$ varie, la position des histogramme ne varie plus (ils restent centrés en $0$), par contre ils diffèrent toujours dans leur dispersion**

**Remarques :**

⇝ Une variable aléatoire est dite centrée lorsque son espérance vaut $0$.

⇝ Si $X$ désigne une variable aléatoire sur $\Omega$ la variable $Y = X - E(X)$ est centrée et $\forall k \in \Omega$ on a

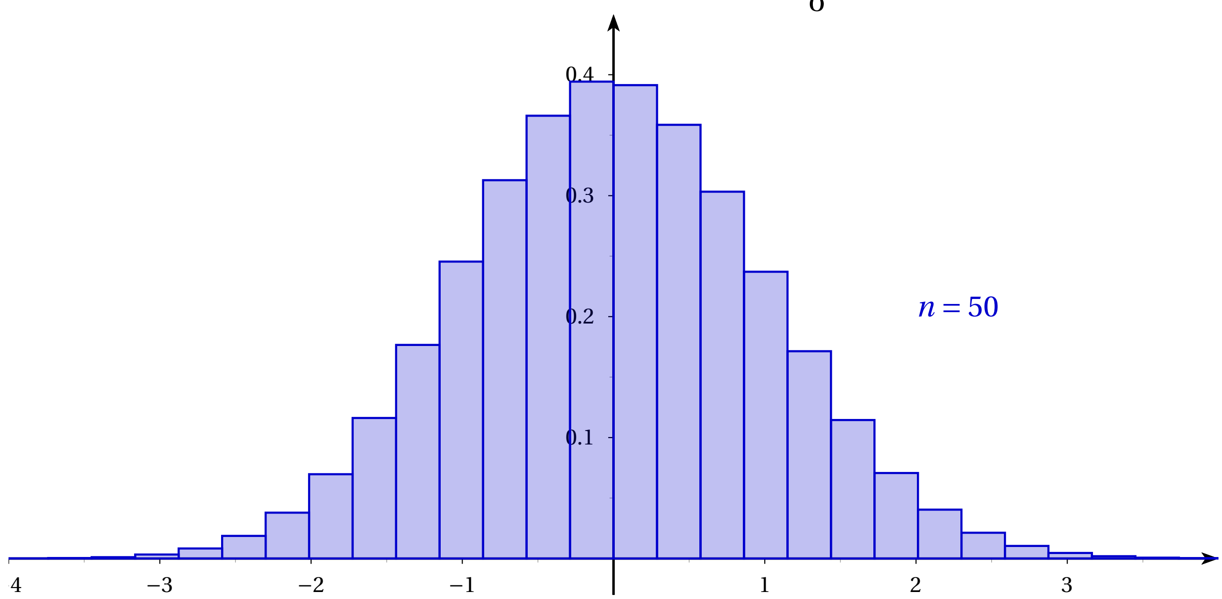
$$P(Y = k - E(X)) = P(X = k)$$

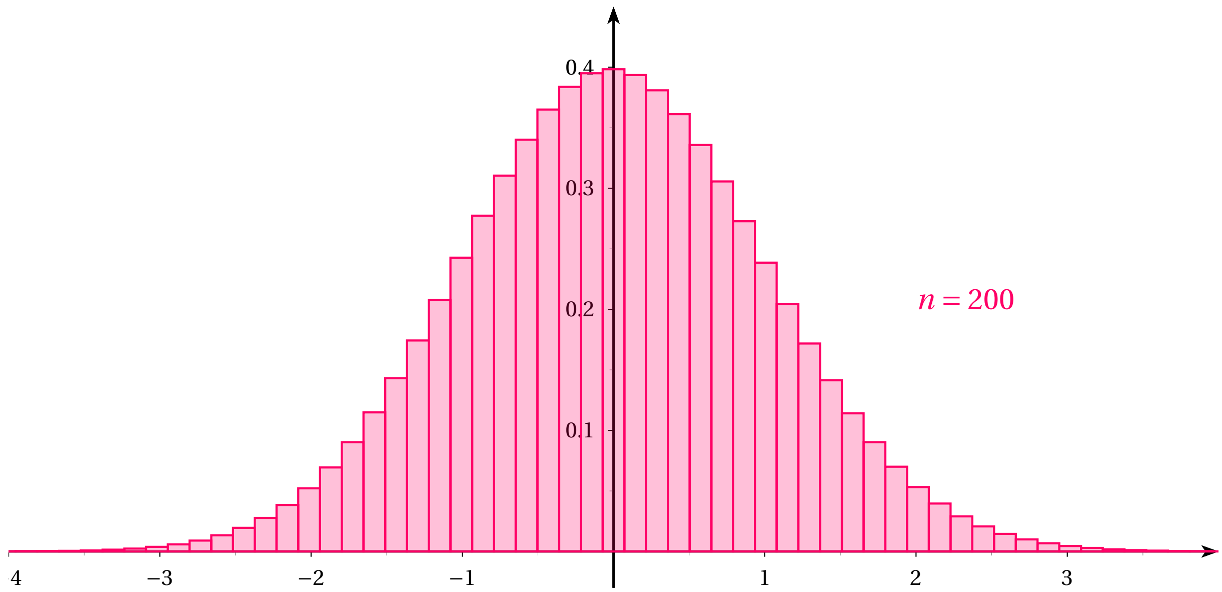
## III.3. Réduire

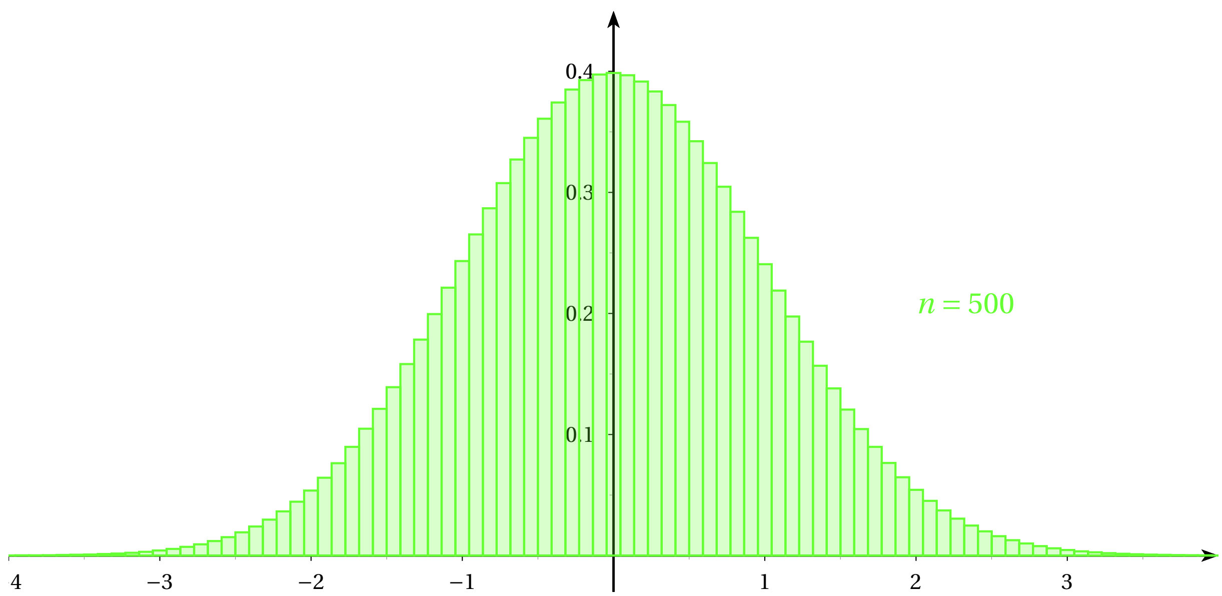
**Travail de l'élève 6** : On reprend encore le contexte de l'activité précédente. Reste donc de la dispersion à stabiliser. Considérons pour cela la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

1. Déterminer $z$ tel que $P(X = k) = P(Z = z)$.
2. Calculer $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.
   **Pour cette raison on dit que la variable $Z$ est centrée réduite.**
3. On a représenté les histogrammes de la loi de $Z$ pour les trois valeurs de $n$ précédentes.
   a. Expliquer.
   **Valeurs prises par $Z$ ? écart entre deux valeurs consécutives de $z$ : $1/\sigma$, hauteur des rectangles : $P(X = k) = P(Z = z)$ pr un $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$**
   b. Que se passe-t-il lorsque $n$ varie ?
   c. Quelle est la somme des aires des rectangles pour un $n$ donné ?
4. Dire alors lequel de Norbert, Simone ou Fabrice a l'échantillon le plus représentative de la population ?

**Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ pour $p = 0.35$**





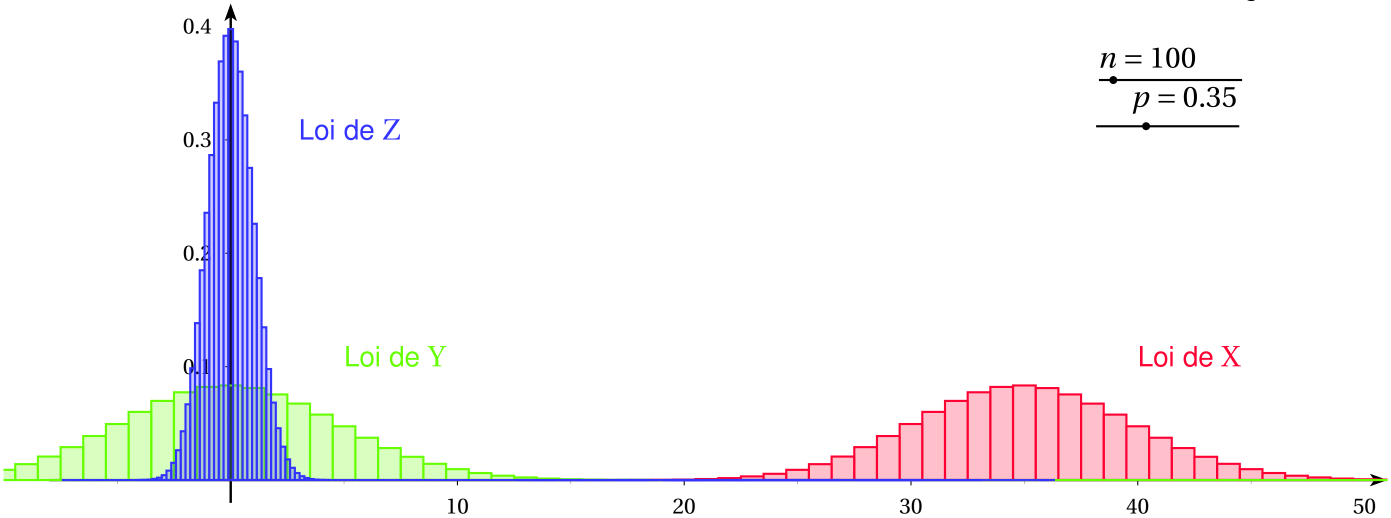

**On constate que désormais quand $n$ varie, l'allure des histogrammes change peu. On peut même dire que lorsque $n$ devient grand, on aurait envie de l'approcher par la courbe d'une fonction continue...**

**Remarques :**

- Une variable aléatoire est dite centrée réduite lorsque son espérance vaut $0$ et son écart-type $1$.
- Si $X$ désigne une variable aléatoire sur $\Omega$ la variable $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite et $\forall k \in \Omega$ on a

$$P\left(Z = \frac{k - E(X)}{\sigma(X)}\right) = P(X = k)$$

**Résumé : Histogrammes des lois de probabilité de** $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{B}(100, 0.35)$, $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mu$ **et** $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma}$




## III.4. Théorème de Moivre-Laplace

**Travail de l'élève 7** : Les lois de probabilité discrètes donnant lieu à des calculs fastidieux dans certaines situations, on cherche à approcher les résultats par ceux de calculs effectués avec des variables aléatoires continues à densité.

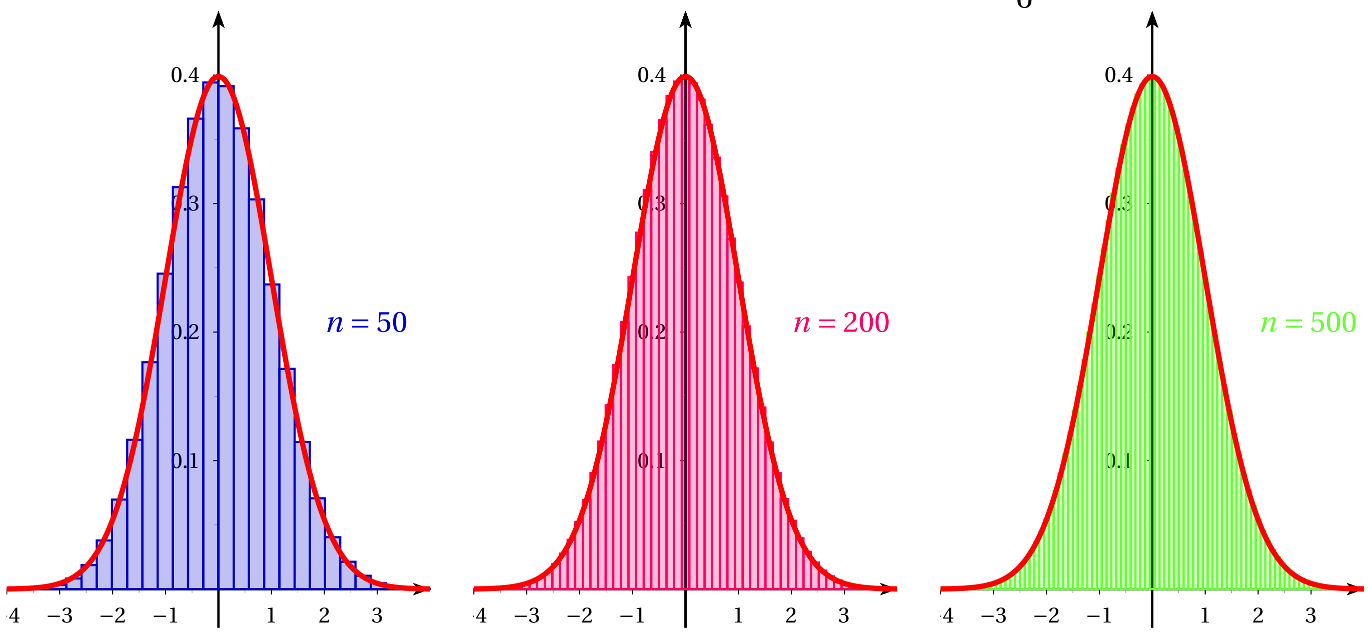
Dans le cadre des programmes de Terminale, ce problème est traité pour les lois binomiales.

Reprenons alors l'exemple précédent. On introduit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On a représenté ci-dessous la courbe de cette fonction sur les trois histogrammes de loi de Z.

1. Que constate-t-on ?
2. Conjecturer la valeur de $\mathrm{I} = \lim\limits_{x \to -\infty} \displaystyle\int_x^0 f(t)\,dt + \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$, puis les valeurs de $\mathrm{I}_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \displaystyle\int_x^0 f(t)\,dt$ et $\mathrm{I}_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Que donne Géogébra ou votre calculatrice comme valeur approchée de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,dt$ ?
4. Interpréter graphiquement cette intégrale, puis en termes de probabilités sur X.

**Courbe de Gauss et Histogrammes des lois de probabilité de** $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$




***Rappel***

Une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, lorsque $X$ compte les succès lors de $n$ répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$.

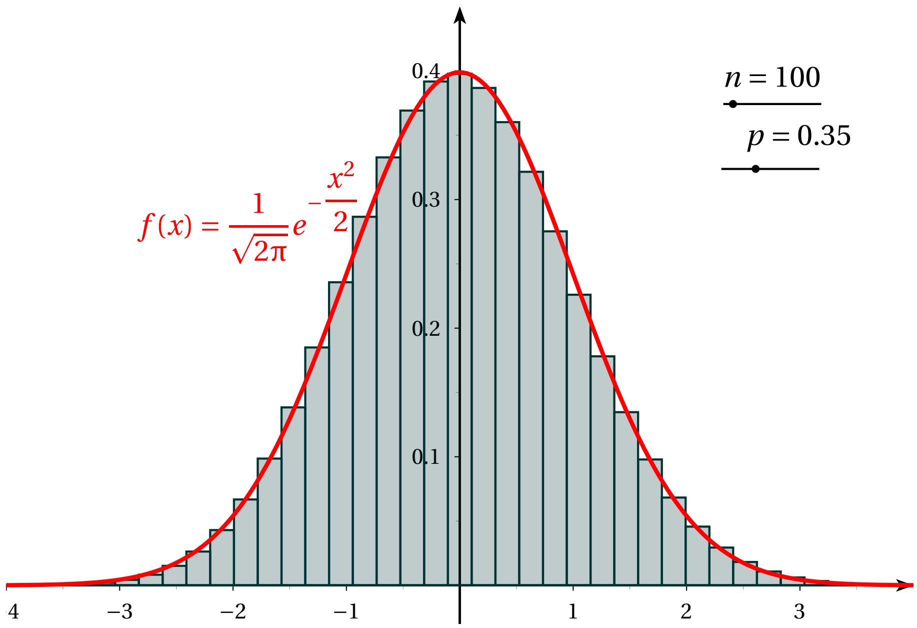
Dans ce cas, $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

**Théorème 1.** (Moivre-Laplace, Admis)

Soit $X_n$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous réels $a$ et $b$, avec $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$





C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf