

## CHAPITRE 11

# PRODUIT SCALAIRE



## HORS SUJET



**TITRE :** « Black Swan »

**AUTEUR :** DARREN ARONOFSKY

**PRÉSENTATION SUCCINCTE :** Darren Aronofsky est né le 12 février 1969 dans une famille juive de New York. Il s'intéresse assez vite à l'art et entre à l'université Harvard pour étudier les techniques de réalisation et d'animation. Il y fait la rencontre de Sean Gullette avec qui il tourne son court métrage de fin d'études, Supermarket Sweep. En février 1996, il parvient à rassembler les 60 000 dollars nécessaires pour la réalisation de son premier long métrage,  $\pi$ , qui sera un véritable succès, remportant de nombreux prix et souvent classé parmi les 10 meilleurs films de l'année. Il enchaîne en 2000 avec Requiem for a dream, adaptation du roman éponyme de Hubert Selby : un film choc sur l'addiction sous toutes ses formes, montrant la décadence infernale d'un quatuor noyant son quotidien dans des visions faussées du paradis et de la célébrité, avec Jared Leto, Jennifer Connelly, Ellen Burstyn et Marlon Wayans.

En 2010, il sort Black Swan avec Natalie Portman, Vincent Cassel, Mila Kunis, Barbara Hershey et Winona Ryder, qui connaît lui aussi un grand succès et gagne de nombreux prix, notamment l'Oscar 2011 de la meilleure actrice pour Natalie Portman.

**Au sujet de Black Swan :** « Ce n'est donc pas par plaisir sadique ou goût de la manipulation qu'Aronofsky filme cette descente aux enfers. Il a une vraie obsession, qui lui tient à coeur, et qui le pousse à filmer : la quête de la perfection. » (Cahier du cinéma)

Document réalisé à l'aide de  $\text{\LaTeX}$

**Auteur :** C. Aupérin

**Site :** wicky-math.fr.nf

**Lycée Jules Fil** (Carcassonne)

# Table des matières

<b>I ) Norme d'un vecteur dans l'espace</b>	<b>2</b>
I.1. Définition . . . . .	2
I.2. Application : Equation d'une sphère . . . . .	2
<b>II ) Diverses caractérisations du produit scalaire dans l'espace</b>	<b>3</b>
II.1. La simplicité d'une définition analytique . . . . .	3
II.2. L'indépendance du repère choisi grâce aux normes . . . . .	4
II.3. Autres caractérisations du produit scalaire . . . . .	5
II.4. Une forme bilinéaire symétrique définie positive . . . . .	8
<b>III ) Applications : l'orthogonalité dans l'espace</b>	<b>10</b>
III.1. Vecteurs orthogonaux . . . . .	10
III.2. Orthogonalité d'une droite et d'un plan . . . . .	12
III.3. Vecteur normal d'un plan . . . . .	14
<b>IV ) Caractérisation d'un plan et conséquences</b>	<b>14</b>
IV.1. L'importance d'un vecteur normal . . . . .	14
IV.2. Equation cartésienne d'un plan . . . . .	15
IV.3. Applications aux positions relatives dans l'espace . . . . .	18

## **L'ESSENTIEL :**

- ↪ Calculs de distances
- ↪ Choisir la forme appropriée pour calculer un produit scalaire
- ↪ Caractériser l'orthogonalité dans l'espace
- ↪ Caractériser les plans dans l'espace et revoir les positions relatives

« Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous »  
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

# CHAPITRE 11:

## PRODUIT SCALAIRE



### Au fil du temps

Le produit scalaire est une opération, qui a deux vecteurs associe un nombre réel. Vous l'avez découvert l'an dernier dans le plan. Nous allons ici étendre cette opération à l'espace.

Etymologiquement, le mot « scalaire » provient du latin *scala* qui signifie échelle, historiquement le mot « scalaire » en mathématiques désigne un nombre réel. Si on veut comprendre le lien entre les deux, il faut remonter à l'empire romain. Dans les quartiers pauvres où s'élevaient de grands immeubles surpeuplés appelés *Insulae*, des échelles servaient parfois à passer d'un étage à l'autre. A l'époque, on désignait par « échelle 2 » ce qu'on appellerait aujourd'hui « étage 2 ». C'est ainsi que le mot échelle (*scala*) fut associé à l'idée de nombre.

Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.

La notation du produit scalaire à l'aide d'un point provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.

Le produit scalaire possède de multiples applications. En physique, il est, par exemple, utilisé pour modéliser le travail d'une force. En géométrie analytique il permet de déterminer le caractère orthogonal de deux droites ou d'une droite et d'un plan, de caractériser les cercles, les sphères et les plans par une équation.

Rappelons également qu'en trigonométrie, il permet de linéariser les fonctions sinus et cosinus, et de généraliser les formules de valables dans un triangle rectangle aux triangles quelconques, ie qu'il permet de calculer un angle en fonction des longueur des côtés et réciproquement.

Ainsi, le produit scalaire lie l'algèbre à la géométrie, deux domaines jusqu'ici étrangers pour vous.

Vous avez remarqué au moment de l'étude de la fonction exponentielle que son mode de construction n'était pas unique : certains partent de l'équation différentielle  $y' = y$ , d'autres de l'équation fonctionnelle  $f(x + y) = f(x) \times f(y)$ , d'autres encore de la suite de terme général  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  ou même de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  ... Pourtant, tous construisent la même fonction, car ces définitions s'avèrent équivalentes. Il en est de même pour la fonction logarithme népérien, définie à partir de son équation fonctionnelle  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ , ou comme primitive de la fonction inverse, ou encore comme fonction réciproque de la fonction exponentielle. La nature du problème étudié, le niveau d'enseignement, etc. incitent alors à préférer l'une ou l'autre des définitions. Le produit scalaire peut aussi être défini de plusieurs manières.

Nous choisirons la méthode la plus simple, prolongeant celle du plan à partir des coordonnées, pour ne pas vous faire peur.

Nous constaterons d'ailleurs de suite que le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace est simplement le même que celui de ces deux vecteurs dans le plan qui les contient tous les deux (deux vecteurs étant toujours coplanaires). Le livre fait le contraire, c'est un choix. Ensuite, nous démontrerons toutes les autres caractérisations et propriétés du produit scalaire dans l'espace, en utilisant parfois un repère orthonormé, afin d'utiliser le théorème de Pythagore, et c'est tout ce dont nous aurons besoin.

Vous constaterez bientôt que toutes les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan (ce qui est logique au vu de la constatation précédente).

Dans tout le chapitre, on munit l'espace d'un repère et on considère deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

## I) Norme d'un vecteur dans l'espace

### I.1. Définition

#### Propriété 1.

Dans un repère orthonormé, la norme du vecteur  $\vec{u}$  est :

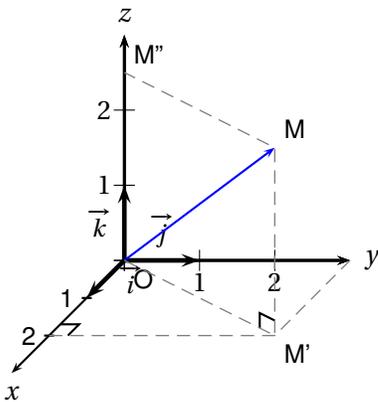
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



#### Preuve

Considérons le point M le point de l'espace tel que  $\vec{u} = \vec{OM}$ .

Alors  $M(x; y; z)$ , par définition des coordonnées de  $\vec{u}$ . On a le schéma suivant :



Comme le repère est orthonormé, on peut utiliser le théorème de Pythagore dans des plans, et calculer

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{OM}\|^2 = OM^2$$

En effet :

$$OM^2 = OM'^2 + z^2 \quad \text{et d'autre part,} \quad OM'^2 = x^2 + y^2.$$

Finalement on obtient que  $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Donc  $\boxed{\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  car  $\|\vec{u}\| \geq 0$ .



#### Exemple :

En précisant les repères utilisés, calculer la longueur de la diagonale

↪ d'un cube de côté 1

↪ d'un pavé droit de côté 1, 2 et 3.



**Exercice du Cours** : Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points  $A(2; 1; 3)$ ,  $B(-1; 2; 4)$ ,  $C(3; -1; 8)$  et  $D(0; 0; 9)$ .

- Démontrer que les quatre points sont coplanaires.
- Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

### I.2. Application : Equation d'une sphère



#### Travail de l'élève 1 :

- Caractériser géométriquement l'ensemble des points M d'une sphère S de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ .

2. On munit l'espace d'un repère orthonormé.  
Traduire la caractérisation ci-dessus en termes de coordonnées.

 **Théorème 1.**

Dans un repère orthonormé, la sphère  $S$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ , notée  $S(\Omega; r)$  est l'ensemble des points  $M$  à la distance  $r$  de  $\Omega$ . Ainsi,

$$M(x; y; z) \in S(\Omega; r) \iff \Omega M = r \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$$

où  $(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$  sont les coordonnées du centre de la sphère  $S$  et  $r$  son rayon.

**Remarques :**

- $\rightsquigarrow$  On dit que  $S$  a pour équation  $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$ .  
 $\rightsquigarrow$  Pour rappel, dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'équation du cercle  $C$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$$

 **Exemple :**

On se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, pour chacune des équations suivantes, dites si c'est l'équation d'une sphère dans l'espace.

Si oui, préciser son centre et son rayon.

1.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 6z = -10$

2.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 11 = 0$

 **Exercice du Cours :** Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points  $A(-1; 2, 2)$ ,  $B(1, 2, 2)$  et  $C(1; -2, 2)$ .

1.
  - a. Démontrer que les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont sur une sphère  $(S)$  de centre  $D(0; 0; 4)$  dont on précisera le rayon.
  - b. En déduire une équation cartésienne de  $(S)$ .
  - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(IO)$  où  $I$  désigne le milieu du segment  $[AB]$ .
  - d. Déterminer les points d'intersection de  $(OI)$  et de la sphère  $(S)$ .
2.
  - a. Montrer que  $OA = OB = OC$ .
  - b. En déduire une deuxième sphère  $(S')$  passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et en donner une équation cartésienne.

## II ) Diverses caractérisations du produit scalaire dans l'espace

### II.1. La simplicité d'une définition analytique

Commençons par étendre la définition du produit scalaire dans le plan à l'espace muni d'un repère orthonormé.

 **Définition 1.** (Produit scalaire dans l'espace)

Dans un repère **orthonormé**, on appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

 **Exemple :**

Avec  $\vec{u}(1;2;3)$  et  $\vec{v}(4;5;6)$  on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

**Remarques :**

↪ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on se souvient que le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

↪ On note  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$ .

De même, si A et B sont deux points (de l'espace ou du plan)

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$$

↪ Si l'un des deux vecteurs  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul alors le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

 **Attention !**

La réciproque est fautive ! En effet, soit  $\vec{u}(1;2;-3)$  et  $\vec{v}(-2;4;2)$  alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 8 - 6 = 0$

 **Exercice du Cours :** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que  $AB = AE = 2$  et  $AD = 4$ . Le point I est le centre du rectangle ABFE et J est le milieu de [EH].

Après avoir choisi un repère adapté, calculer les produit scalaires suivants :

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{HG} \quad \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{HG} \quad \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{BH} \quad \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA} \quad \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{JI} \quad \overrightarrow{JG} \cdot \overrightarrow{JI}$$

**II.2. L'indépendance du repère choisi grâce aux normes**

La définition donnée du produit scalaire deux vecteurs suggère que la valeur de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dépend du repère choisi. En effet, les coordonnées en dépendent, de plus, nous avons précisé qu'il s'agissait de coordonnées dans un repère orthonormé. Montrons que ceci n'est en réalité pas le cas, grâce à la nouvelle caractérisation suivante.

 **Théorème 2.** (2<sup>e</sup> caractérisation, indépendante du repère)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

 **Preuve**

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(xx' + yy' + zz') \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

**Remarques :**

- ↪ Nous venons d'obtenir une autre caractérisation de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  (totalement équivalente à la définition choisie). Celle-ci définit  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  uniquement à partir de normes de vecteurs. Or, la norme d'un vecteur ne dépend pas du repère choisi (qu'il soit orthonormé ou non, simplement, vous ne connaissez pas de formule pour la calculer dans un repère non orthonormé). Par conséquent, le produit scalaire non plus et on peut donc le définir dans n'importe quel repère grâce à cette caractérisation.
- ↪ Finalement, il s'agit de la même définition que dans le plan. En effet, remarquons que cette dernière caractérisation était aussi valable dans le plan. Or deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires. Donc, il existe un plan  $\mathcal{P}$  qui contient trois points A, B et C tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . D'où :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad (\text{produit scalaire dans l'espace}) \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad (\text{produit scalaire dans le plan } \mathcal{P})\end{aligned}$$

Ainsi, le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans l'espace n'est autre que celui dans le plan de deux de leurs représentants.

 **Exercice du Cours** : SABCD est un pyramide à base carrée de sommet S dont toutes les arêtes ont la longueur  $a$ . Calculer en fonction de  $a$  les produit scalaires suivants :  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$        $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$

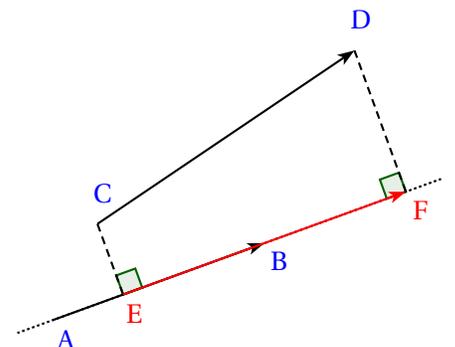
**II.3. Autres caractérisations du produit scalaire****Théorème 3.**

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
2. Lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$
3. Lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , on note  $\vec{v}'$  le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\vec{u}$  et on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

**Remarques :**

- ↪ Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite  $d$  est le point d'intersection de la droite  $d$  et de la perpendiculaire à  $d$  passant par M. Le projeté orthogonal d'un vecteur  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  sur un  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  non nul est le vecteur  $\vec{v}' = \overrightarrow{HK}$  où H et K sont respectivement les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).
- ↪ Il s'agit de trois autres caractérisations de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , car en réalité, elles sont équivalentes à la définition donnée.
- ↪ Pour chacune des démonstrations, on peut dire que ces caractérisations ont été démontrées en classe de Première dans le plan, et comme la définition du produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans l'espace n'est autre que celle du produit scalaire dans un plan contenant deux représentants de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , elles restent valides.





**Preuve Hors Programme ?**

Expliquons tout de même comment démontrer ces caractérisations autrement :

1. On calcule  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$  grâce aux coordonnées dans un repère orthonormé.
2. On se ramène à la démonstration dans le plan. Soient les points A, B et C tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .  
On pose  $\theta = (\vec{u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ,  $\vec{i} = \frac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{j}$  tel que

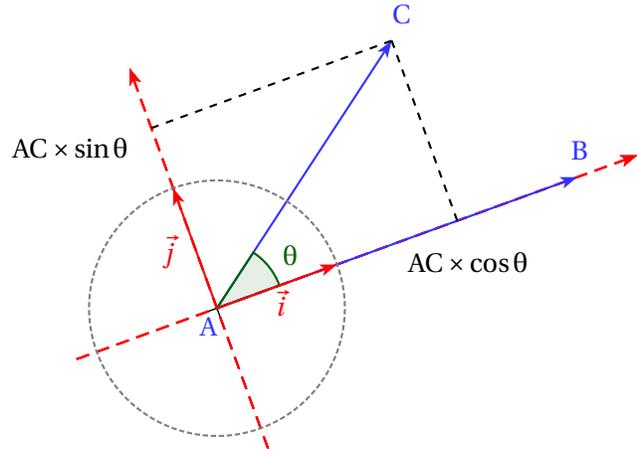
$$(\vec{i}; \vec{j}) = +\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = 1$$

Le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est donc un repère orthonormé d'un plan contenant A, B et C.

$$\text{On a alors } \vec{u} \begin{pmatrix} AB \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} AC \times \cos \theta \\ AC \times \sin \theta \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= AB \times AC \times \cos \theta + 0 \times AC \times \sin \theta \\ &= AB \times AC \times \cos \theta \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos (\vec{u}; \vec{v}) \end{aligned}$$



3. On se ramène à la démonstration dans le plan. Soient les points A, B et C tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

( $\vec{u} \neq \vec{0}$  donc  $A \neq B$ ).

Ainsi  $\vec{v}' = \overrightarrow{AH}$ . On a

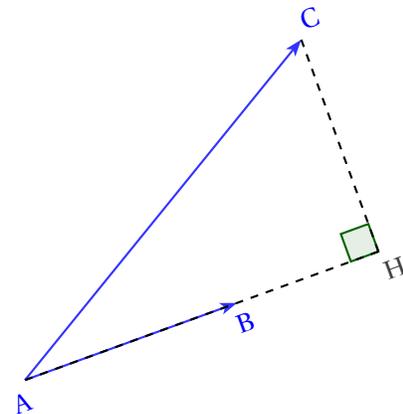
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} \end{aligned}$$

On sait que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont colinéaires. Donc

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AH}) = \pm 1 \quad \text{suivant les sens}$$

on sait que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{HC}$  sont orthogonaux. Donc  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{HC}) = 0$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \quad (\text{ce qui est bien égal à } \vec{u} \cdot \vec{v}') \\ &= AB \times AH \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AH}) \\ &= \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont de sens contraire} \end{cases} \end{aligned}$$



Et

 **Exemple :**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1. Calculer de plusieurs façons le produit scalaire  $\vec{AE} \cdot \vec{BG}$

 **Solution :**

↪ Dans la base orthonormale  $(\vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$  on a :

$\vec{AE}(0; 0; 1)$  et  $\vec{BG}(0; 1; 1)$ , par conséquent :

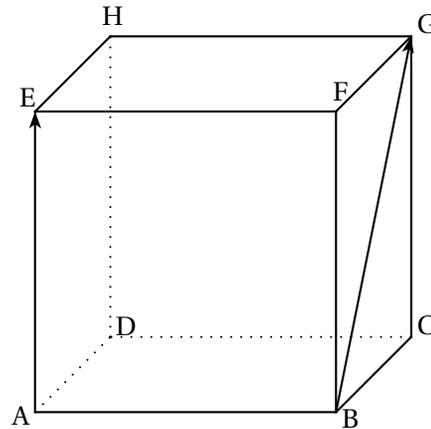
$$\vec{AE} \cdot \vec{BG} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

↪ Avec le cosinus :

$$\vec{AE} \cdot \vec{BG} = AE \times BG \times \cos(\vec{AE}; \vec{BG}) = 1^2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

↪ Avec le vecteur projeté :

$$\vec{AE} \cdot \vec{BG} = \vec{AE} \cdot \vec{AF} = \vec{AE} \cdot \vec{AE} = AE^2 = 1^2 = 1$$



 **Exercice du Cours :** SABCD est un pyramide à base carrée de sommet S dont toutes les arêtes ont la longueur  $a$ . Calculer en fonction de  $a$  les produits scalaires suivants, avec la méthode la plus appropriée :

$$\vec{SA} \cdot \vec{SB} \quad \vec{SA} \cdot \vec{SC} \quad \vec{SA} \cdot \vec{AC} \quad \vec{AB} \cdot \vec{SC} \quad \vec{SC} \cdot \vec{DB}$$

 **Exercice 1 :** Soit un tétraèdre régulier ABCD de côté 1. On note I et J les milieux respectifs de [BD] et [AD]. On note K le projeté orthogonal de C sur (BA)

1. Déterminer la position de K.
2. En déduire que  $\vec{IJ} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{4}$

 **Exercice 2 :** On considère un cube ABCDEFGH d'arête  $a$ . I est le centre de la face ABCD et J le milieu du segment [AE].

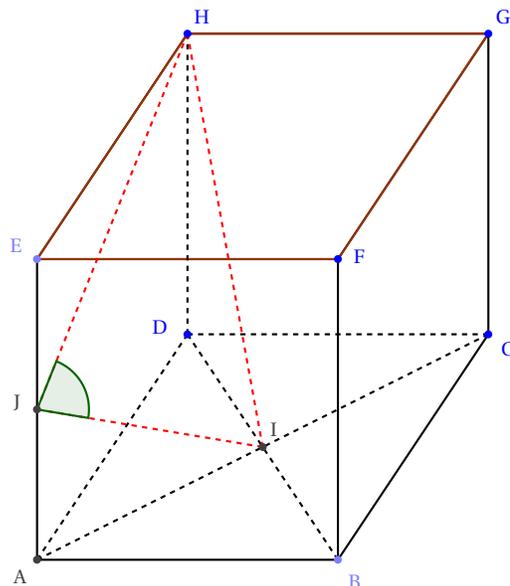
1. Calculer les produits scalaires  $\vec{AC} \cdot \vec{EH}$  et  $\vec{FI} \cdot \vec{DB}$ .
2. Déterminer les longueurs des côtés du triangle IJH.
3. En déduire à  $0,1^\circ$  près, la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{IJH}$

 **Exercice 3 :** On reprend la figure de l'exercice précédent.

1. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\vec{AF} \cdot \vec{GB} \quad ; \quad \vec{GI} \cdot \vec{DB} \quad ; \quad \vec{AF} \cdot \vec{CB} \quad ; \quad \vec{HJ} \cdot \vec{JB}$$

2. Déterminer une mesure de l'angle  $\widehat{HJB}$  à  $0,1^\circ$  près.



 **Exercice 4 :** Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(0; 1; 0)$  et  $C(2; 0; 3)$ .

1. Calculer les produits scalaires :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

2. Déterminer une valeur approchée, à  $0,1^\circ$ , les mesures en degrés des angles géométriques :  $\widehat{CAB}$ ,  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{BCA}$

 **Exercice 5** : Soient ABCD un tétraèdre régulier de côté  $a$  et I le milieu du segment [BC].

Déterminer une valeur approchée en degré de la mesure de l'angle  $\widehat{AID}$

 **Exercice 6** : On considère un tétraèdre régulier ABCD, I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD]. G est le milieu du segment [IJ].

1. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC}$ .

2. En déduire à  $0,1^\circ$  près la mesure de l'angle  $\widehat{AGC}$ .

 **Exercice 7** : On considère un tétraèdre ABCD, dans lequel la face ABC est un triangle équilatéral de côté 1, et les faces ACD et BCD sont des triangles isocèles rectangles en C.

↪ Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$ , puis  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

↪ Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABD. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ , déterminer la position de H sur le segment [AD].

↪ Calculer une valeur approchée de l'angle géométrique  $\widehat{HCB}$ .

 **Exercice 8** : Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls. Etablir l'équivalence :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

## II.4. Une forme bilinéaire symétrique définie positive

### Propriété 2.

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace, on a

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$

2.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$  pour tout  $k \in \mathbb{R}$

3.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

5.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

### Remarques :

↪ On dit que le produit scalaire est une forme **bilinéaire symétrique définie positive**.

↪ On note aussi  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ .

De même, si A et B sont deux points de l'espace, on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 = AB^2$

↪ Toutes ces propriétés étaient également vraies dans le plan.

**Preuve**

Plaçons nous dans un repère orthonormé de l'espace, notons  $\vec{u}(x; y; z)$ ,  $\vec{v}(x'; y'; z')$  et  $\vec{w}(x''; y''; z'')$

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = x'x + y'y + z'z = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2.  $\vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = x\lambda x' + y\lambda y' + z\lambda z' = \lambda xx' + \lambda yy' + \lambda zz' = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(xx' + yy' + zz') = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (x + x')x'' + (y + y')y'' + (z + z')z'' = xx'' + x'x'' + yy'' + y'y'' + zz'' + z'z''$   
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = xx'' + yy'' + zz'' + x'x'' + y'y'' + z'z''$   
 i.e  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$
5.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \|\vec{u}\|^2 = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

**Exemple :**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD}$$

### III ) Applications : l'orthogonalité dans l'espace

#### III.1. Vecteurs orthogonaux

Nous allons maintenant aborder la notion qui a motivé l'introduction du produit scalaire en Terminale, à savoir l'orthogonalité de deux vecteurs.

##### Définition 2.

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls et  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  deux de leur représentants dans un même plan. On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** lorsque (AB) et (AC) sont perpendiculaires et on note naturellement  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Remarque :** Cette définition est s'applique également dans le plan ou dans un espace de dimension supérieure à 3.

##### Théorème 4.

Lorsque  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

##### Remarques :

- ↪ Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur. Ceci permet de rester cohérent. En effet, si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors pour tout  $\vec{v}$  on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- De plus, si un vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal à tout autre vecteur, alors il est en particulier orthogonal à lui-même. Par conséquent :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 0 \iff x = y = z = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
- ↪ Ce théorème était évidemment déjà vrai dans le plan.

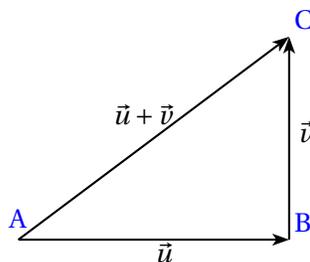


##### Preuve

Le plus simple reste d'utiliser la caractérisation  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ . Comme  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) &\iff \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\iff (\vec{u}; \vec{v}) = \pm \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{aligned}$$

**Remarque :** On peut démontrer ce résultat en utilisant d'autres caractérisations de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Par exemple, considérons la figure suivante :



Si  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , alors (AB)  $\perp$  (BC) et d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$$

D'où

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0$$

Réciproque : Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , alors on a :

$$\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0 \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \iff AB^2 + BC^2 = AC^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore assure alors que  $(AB) \perp (BC)$ , donc  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

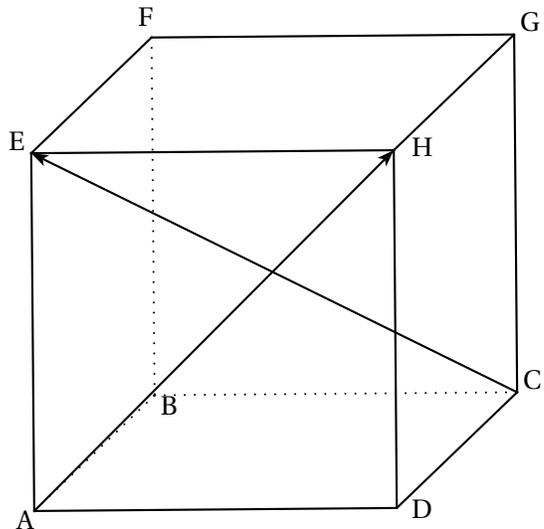
La caractérisation avec les projetés orthogonaux est également commode pour démontrer ce théorème.

**Exemple :**

ABCDEFGH est un cube dont les sommets sont disposés comme sur la figure ci-dessous.

Les diagonales d'un cube sont-elles orthogonales ?

Les vecteurs  $\vec{AH}$  et  $\vec{CE}$  sont-ils orthogonaux ?



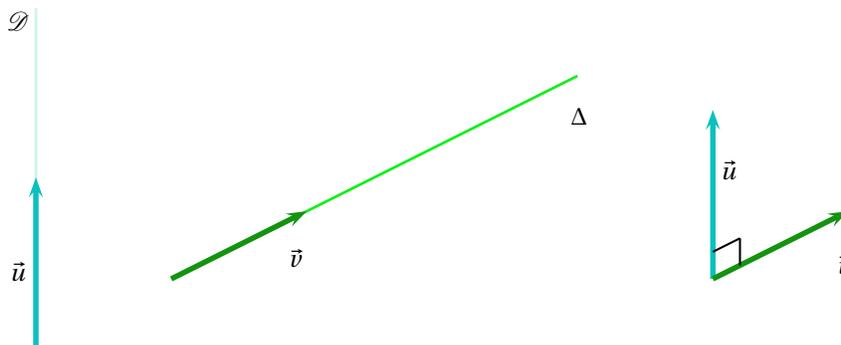
**Solution :**

On se place dans un repère orthonormé et on calcule  $\vec{AH} \cdot \vec{CE}$  avec les coordonnées.

**Définition 3.** (Propriété)

Soient  $\mathcal{D}$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $\mathcal{D}'$  une droite de vecteur directeur  $\vec{v}$ .

On dit que les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont **orthogonales** et on note  $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$  lorsque  $\vec{u} \perp \vec{v}$  ie lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



**Remarque :** Deux droites perpendiculaires sont orthogonales, mais la réciproque n'est pas vraie, car ces droites peuvent être non coplanaires.

**Exemple :**

On considère un tétraèdre ABCD régulier d'arête  $a$ . (chaque face est un triangle équilatéral de côté  $a$ ) Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

**Solution :**

Démontrons ce résultat pour les arêtes [AC] et [BD] (compte tenu de la symétrie de la figure, cela suffira à démontrer le résultat voulu).

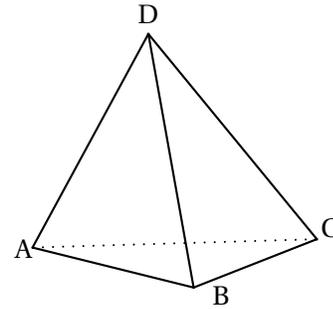
$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{BC} \cdot \vec{BD} \\ &= -\vec{BA} \cdot \vec{BD} + \vec{BC} \cdot \vec{BD}\end{aligned}$$

De plus  $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = BA \times BD \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2$

Et  $\vec{BC} \cdot \vec{BD} = BC \times BD \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a^2$ .

Ainsi :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$



**Exercice 9 :** On considère les points  $A(3;4;-2)$ ,  $B(1;6;0)$  et  $C(-2;2;1)$ .  
Montrer que le triangle ABC est rectangle.



**Exercice 10 :** Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on donne les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  de représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -7 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 5 - 3t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Démontrer que les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont orthogonales.  
Sont-elles perpendiculaires ?



**Exercice 11 :** Dans le cube ABCDEFGH où P est le milieu du segment [HF]. Quelles sont les positions relatives des droites (AP) et (HF) ? des droites (AP) et (EC) ?



**Exercice 12 :** Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne le point  $A(-1;2;0)$ .

- Démontrer qu'une équation de la sphère (S) de centre A et de rayon 3 est  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
- Déterminer les points I et J communs à (S) et à la droite passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}\left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$
- Sans calculs, déterminer IJ.
- Justifier que (S) est l'ensemble des points M de l'espace tels que  $\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$



**Exercice(s) du livre :** Déclic : 41-42-53 p 309

### III.2. Orthogonalité d'une droite et d'un plan



#### **Théorème 5.** (Définition)

Si une droite  $\Delta$  est orthogonale à deux droites **sécantes** d'un plan  $\mathcal{P}$ , alors  $\Delta$  est orthogonale à toute droite du plan  $\mathcal{P}$ .

On dit que  $\Delta$  est **orthogonale** à  $\mathcal{P}$  et on note naturellement  $\Delta \perp \mathcal{P}$

**Preuve**

Soient  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\Delta$  et  $d_1$  et  $d_2$  deux droites sécantes de  $\mathcal{P}$ , de vecteurs directeurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .  
Par hypothèse, on a  $0 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2$ .

Or, toute droite  $\mathcal{D}$  du plan  $\mathcal{P}$  est dirigée par un vecteur  $\vec{w}$  tel que

$$\vec{w} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) \\ &= a\vec{u} \cdot \vec{v}_1 + b\vec{u} \cdot \vec{v}_2 \\ &= a \times 0 + b \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\Delta \perp \mathcal{D}$ .

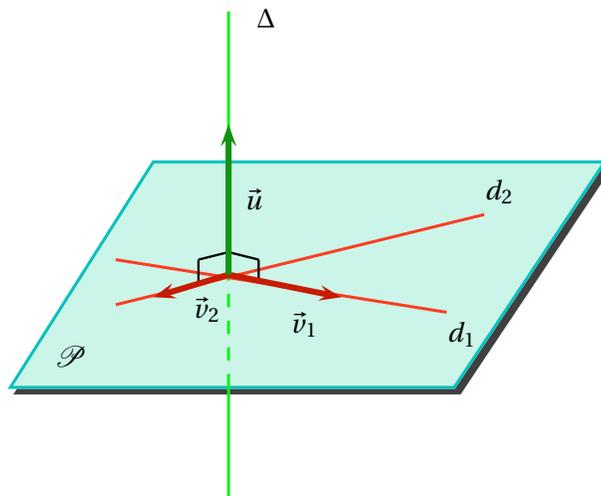
**◆ Corollaire 1.**

Soit  $\Delta$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $\mathcal{P}$  un plan de vecteurs directeurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .

$\Delta$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{v}_2 \end{cases}$  ie si et seulement si  $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$

**Preuve**

Simple traduction du théorème en terme de vecteurs directeurs.

**Remarques :**

- ↪ Cela revient en fait à dire que  $\mathcal{D} \perp \mathcal{P} \iff$  pour tous points M et N de  $\mathcal{P}$  on a  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$
- ↪ Tout plan admet au moins une droite qui lui est orthogonale.



**Exercice du Cours :** On considère un cube ABCDEFGH de côté 1. On note I le milieu de [BC], J celui de [EH] et O le centre de la face CDHG.

1. Montrer que les points A, I, G et J sont coplanaires.
2. Montrer que  $\vec{IJ} = \vec{CH}$  et en déduire que  $\vec{FO} \cdot \vec{IJ} = 0$

3. Montrer que la droite (FO) est orthogonale au plan (AIG)

### III.3. Vecteur normal d'un plan

Une droite est caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

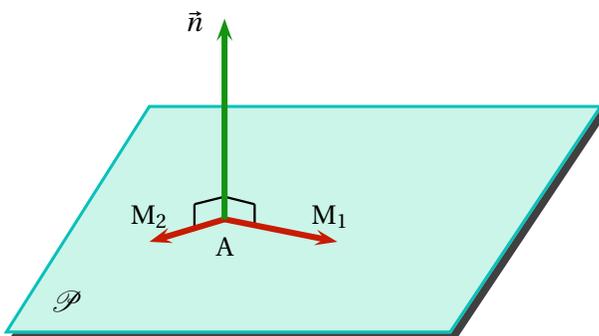
Le problème pour un plan, c'est qu'on a besoin a priori d'un point et de deux vecteurs pour indiquer sa direction.

Cependant, si un plan a deux vecteurs directeurs, nous allons montrer qu'il n'a qu'une seule « direction orthogonale » Donc un plan sera entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur orthogonal à celui-ci.



#### Définition 4.

Etant donné un plan  $\mathcal{P}$ , on appelle **vecteur normal** à  $\mathcal{P}$  tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à  $\mathcal{P}$ .



**Remarque :** Par définition, on a donc désormais qu'une droite  $d$  est orthogonale à un plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si un vecteur directeur de  $d$  est colinéaire à un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ .

## IV ) Caractérisation d'un plan et conséquences

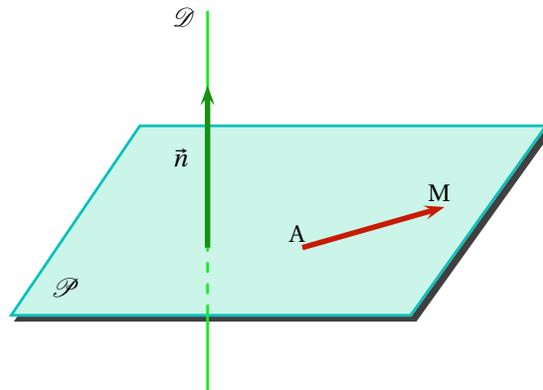
### IV.1. L'importance d'un vecteur normal



#### Proposition 1.

Le plan  $\mathcal{P}$  qui passe par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tel que :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



**Preuve**

On doit montrer que

↪ Pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

↪ Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , alors  $M \in P$ .

$\Rightarrow$  Soit M un point de  $\mathcal{P}$ . Il est clair que si  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ , alors il dirige une droite  $d$  orthogonale à  $\mathcal{P}$ .

D'après le théorème précédent,  $d$  est orthogonale à toute droite de  $\mathcal{P}$ , donc en particulier à (AM).

Ainsi on a bien  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

$\Leftarrow$  Pour démontrer la réciproque, raisonnons par l'absurde :

Supposons que M soit un point de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  mais  $M \notin \mathcal{P}$ .

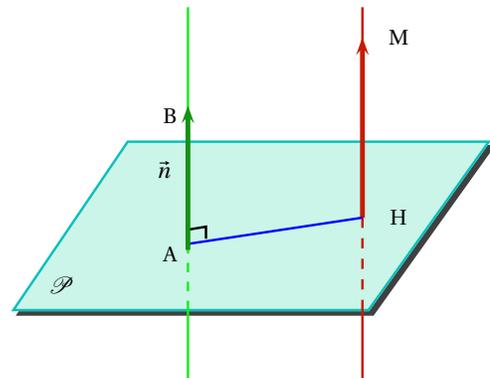
Soit B le point tel que  $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ . Ainsi  $B \notin \mathcal{P}$  et  $(AB) \perp \mathcal{P}$ .

On note H l'intersection de  $\mathcal{P}$  avec la parallèle à (AB) passant par

M. Ainsi  $(AH) \in \mathcal{P}$  donc  $(AH) \perp (AB)$ .

Notons de plus que  $(HM) \parallel (AB)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{car } (AH) \perp (AB) \\ &= \pm HM \times AB \quad \text{car } (HM) \parallel (AB) \end{aligned}$$



Or  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \pm HM \times AB \iff H = M$  car  $A \neq B$ . Mais  $H \in \mathcal{P}$  et nous avons fait l'hypothèse  $M \notin \mathcal{P}$ . Cette hypothèse est donc absurde.

Par conséquent,  $M \in \mathcal{P}$ .

**Remarques :**

↪ On en déduit que tout vecteur orthogonal à  $\vec{n}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{P}$

↪ Ceci va nous permettre d'établir des critères simples de positions relatives, ainsi que des équations cartésiennes de plan.

**Exemple :**

On considère le plan médiateur  $\Pi$  d'un segment [AB] de milieu I :  $\Pi$  est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B.

1. Démontrer que  $M \in \Pi \iff \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$

2. Démontrer que  $\Pi$  est l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient  $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

3. En déduire que  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur normal de  $\Pi$ .

**IV.2. Equation cartésienne d'un plan**

**Travail de l'élève 2.** Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne  $A(1;2;3)$  et  $\vec{n}(1;-3;1)$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point M pour qu'il appartienne au  $\mathcal{P}$  passant par A et orthogonal à  $\vec{n}$ .

**Solution :**

Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace. On a alors :

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0 \iff x - 3y + z + 2 = 0$$

Pour que  $M$  appartienne à  $\mathcal{P}$ , il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation  $x - 3y + z = -2$ .

On dit que  $\mathcal{P}$  a donc pour équation  $x - 3y + z = -2$

**Théorème 6.**

Dans un repère **orthonormé**  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tout plan  $\mathcal{P}$  admet une équation (dite **cartésienne**) de la forme :

$$ax + by + cz = d$$

avec  $a, b, c$  des réels non tous nuls et  $d$  un réel.

De plus le vecteur  $\vec{n}(a; b; c)$  est normal à  $\mathcal{P}$

**Preuve**

Notons  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $\vec{n}(a; b; c)$  un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ , alors on a :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \iff ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \iff ax + by + cz = \underbrace{ax_A + by_A + cz_A}_d$$

En posant  $d = ax_A + by_A + cz_A$  qui est une constante, on obtient le résultat désiré.

**Remarques :**

- ↪ Notons que l'équation d'un plan dans l'espace n'est pas unique.  
En effet si  $\mathcal{P} : x + y + z = 1$  alors  $\mathcal{P}$  a aussi pour équation  $2x + 2y + 2z = 2$ .
- ↪ **Quelques cas particuliers dans un repère orthonormé :**

**Le plan  $(Oxy)$  a pour équation  $z = 0$ .**

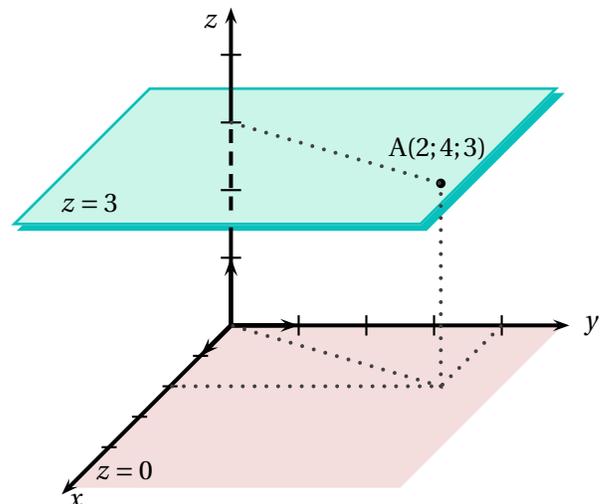
En effet  $O(0; 0; 0) \in (Oxy)$  et  $\vec{k}(0; 0; 1)$  est normal à ce plan, ainsi :

$$M(x; y; z) \in (Oxy) \iff \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = 0 \iff z = 0$$

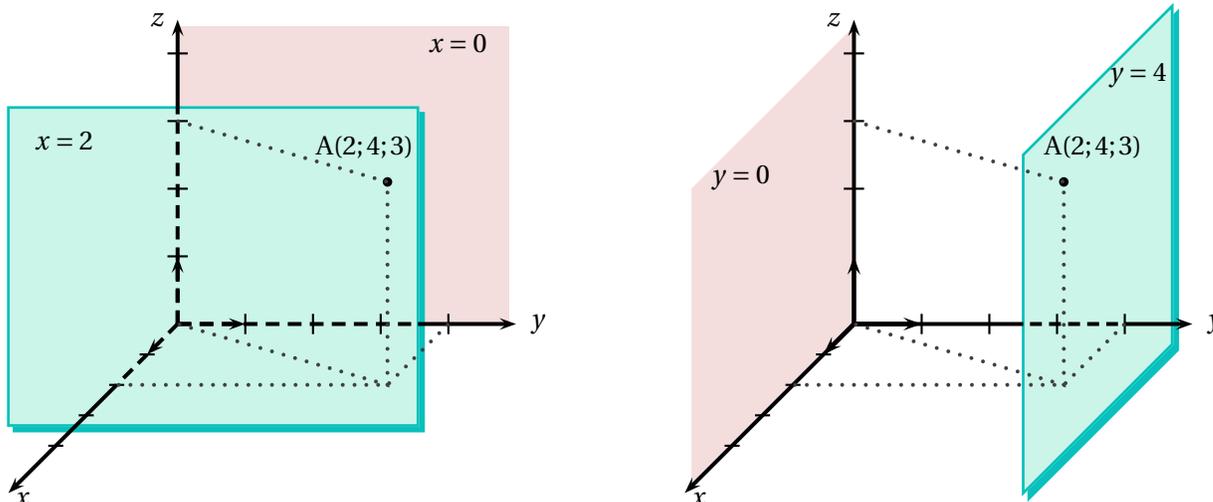
On peut montrer de même que tout plan  $\mathcal{P}$  parallèle au plan  $(Oxy)$  a une équation du type  $z = d$  où  $d$  est une constante.

En effet soit  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de  $\mathcal{P}$ . Comme  $\vec{k}(0; 0; 1)$  est normal à  $\mathcal{P}$ , on a :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{k} = 0 \iff z - z_A = 0 \iff z = z_A$$



De la même manière les plans  $(Oxz)$  et  $(Oyz)$  ont respectivement pour équation  $y = 0$  et  $x = 0$ .  
De plus, tout plan parallèle à  $(Oxz)$  admet une équation du type  $y = d$  où  $d$  est une constante.  
Et tout plan parallèle à  $(Oyz)$  admet une équation du type  $x = d$  où  $d$  est une constante.



### 💡 Exemples :

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace,

- ↪ Donner une équation cartésienne du plan passant par le point  $B(-2; 1; 3)$  et orthogonal à  $\vec{AC}$  avec  $A(1; -2; 2)$  et  $C(4; 1; -1)$ .
- ↪ Démontrer que le plan passant par les points  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$  et  $C(0; 0; c)$  a pour équation cartésienne :  

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

### 📦 Théorème 7.

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation  $ax + by + cz = d$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$ .

### ⚠ Attention !

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  vérifiant l'équation  $ax + by = c$  avec  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  est une droite dans le plan, mais dans l'espace, il s'agit d'un plan ! (parallèle au plan d'équation  $(Oxy)$ , donc à l'axe  $(Oz)$ )

Dans l'espace, on définit les droites par des équations paramétriques, ou encore comme des intersections de deux plans (donc un système de deux équations cartésiennes)

**Preuve**

Supposons par exemple que  $a \neq 0$ . Alors le point  $\left(\frac{d}{a}; 0; 0\right)$  vérifie l'équation donc appartient à (E), qui est donc non vide.

Si  $A(x_A; y_A; z_A) \in (E)$  alors  $ax_A + by_A + cz_A = d$ .

Ainsi pour tout point  $M(x; y; z) \in (E)$  on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) \\ &= ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A \\ &= d - d = 0\end{aligned}$$

Donc (E) est le plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

 **Exercice 13** : Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur normal, dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

1.  $A(3; -1; 2)$  et  $\vec{n}(1; 0; -4)$

3.  $A(-2; 1; 2)$  et  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$

2.  $A(1; -1; 0)$  et  $\vec{n}(1; 1; -2)$

4.  $A(3; 4; 5)$  et  $\vec{n}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$

 **Exercice 14** : Vérifier que chaque équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal :

1.  $3x - 5y + z - 1 = 0$

3.  $3z - x - 3 = 0$

2.  $x = y$

4.  $y = -2x + 1$

 **Exercice 15** : Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan P (déterminer d'abord un point de ce plan et un vecteur normal) :

1. P est le plan médiateur du segment [AB] avec  $A(-1; 3; 1)$  et  $B(0; 5; -3)$ .

2. P est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec  $A(3; 0; 4)$ ,  $B(-1; 1; 1)$  et  $C(2; 0; 0)$ .



**Exercice(s) du livre** : Déclic : 55 à 63 p 311

### IV.3. Applications aux positions relatives dans l'espace

On a donné en début d'année les définitions suivantes :

↔ Une droite  $d$  est parallèle à un plan  $\mathcal{P}$  lorsque un vecteur directeur de  $d$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{P}$ .

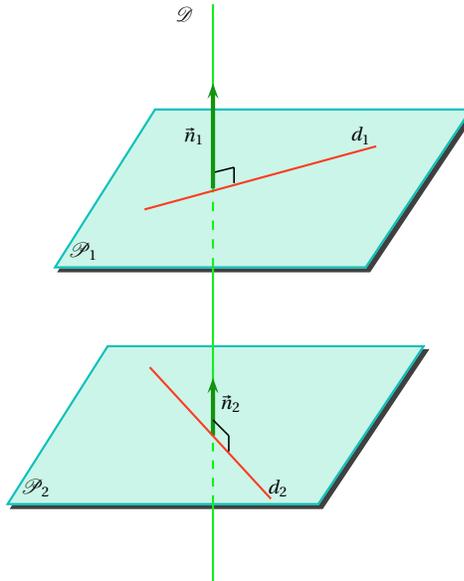
↔ Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont un même couple de vecteurs directeurs.

Grâce aux vecteurs normaux, on peut désormais affirmer les propositions suivantes.

 **Proposition 2.**

↔ Une droite  $d$  est parallèle à un plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si un vecteur directeur de  $d$  est orthogonal à un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ .

↔ Deux plans sont parallèles si et seulement si deux de leur vecteurs normaux sont colinéaires.



**Remarque :** Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont non coplanaires et pas forcément orthogonales ou parallèles.



### Preuve

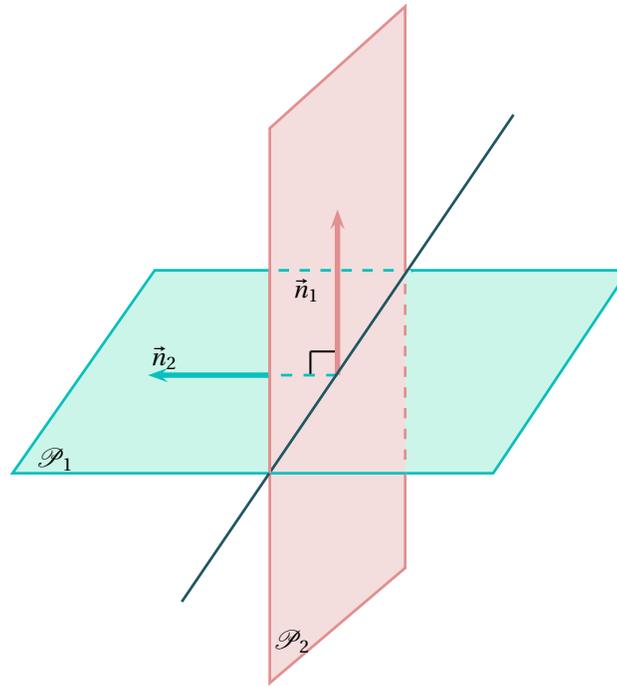
- $\rightsquigarrow$  Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $d$  et  $\vec{n}$  un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ .  
 $d \parallel \mathcal{P} \implies \vec{u} \text{ dirige } \mathcal{P}$ . D'où  $\vec{n} \perp \vec{u}$ .  
 Réciproque : Supposons maintenant que  $\vec{u} \perp \vec{n}$ . Soit A un point de  $\mathcal{P}$  et B le point de l'espace tel que  $\vec{AB} = \vec{u}$ .  
 On a  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \iff \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ .  
 D'après la caractérisation d'un plan, on a  $B \in \mathcal{P}$ , donc  $\vec{u} = \vec{AB}$  dirige  $\mathcal{P}$ .
- $\rightsquigarrow$  Soient deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  de couples de vecteurs directeurs respectifs  $(\vec{u}; \vec{v})$  et  $(\vec{u}'; \vec{v}')$ .  
 Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles, alors  $(\vec{u}; \vec{v})$  est aussi un couple de vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}'$ .  
 Donc si  $\vec{n}$  est un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ , il est orthogonal à chacun des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  donc au plan  $\mathcal{P}'$ .  
 Réciproque : Soient  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  des vecteurs normaux respectifs des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  tels que  $\vec{n}' = k\vec{n}$ .  
 On a  $\vec{n}' \cdot \vec{u} = k\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{n}' \cdot \vec{v} = k\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .  
 Donc  $\vec{n}'$  est un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ .  
 Soit A un point de  $\mathcal{P}$  et B le point tel que  $\vec{AB} = \vec{u}'$ .  
 On a  $\vec{n}' \cdot \vec{u}' = 0 \iff \vec{n}' \cdot \vec{AB} = 0$ .  
 D'après la caractérisation de  $\mathcal{P}$ , on en déduit que  $B \in \mathcal{P}$ . Donc  $\vec{AB} = \vec{u}'$  dirige  $\mathcal{P}$ .  
 De même on montre que  $\vec{v}'$  dirige  $\mathcal{P}$ .  
 Ainsi  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ont un même couple de vecteurs directeurs. Ils sont bien parallèles.



### Définition 5.

Deux plans de l'espace sont dits **orthogonaux** lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

**Remarque :** On aurait pu définir de manière équivalente l'orthogonalité de deux plans par rapport à l'orthogonalité des vecteurs de leur couples de vecteurs directeurs, mais c'était se compliquer la tâche inutilement.



**Remarque :** En particulier,  $\vec{n}_1$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{P}_2$  et  $\vec{n}_2$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{P}_1$ .

**Corollaire 2.**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  d'équations

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{R} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

1.  $\mathcal{P} \parallel \mathcal{R} \iff (a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  sont proportionnels.
2.  $\mathcal{P} \perp \mathcal{R} \iff aa' + bb' + cc' = 0$ .



**Preuve**

1.  $\mathcal{P} \parallel \mathcal{R} \iff \vec{n}(a; b; c) = k\vec{n}'(a'; b'; c')$
2.  $\mathcal{P} \perp \mathcal{R} \iff \vec{n} \perp \vec{n}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \iff aa' + bb' + cc' = 0$

 **Exemples :**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. On donne les plans suivants :  $\mathcal{P} : 3x + 2y - 4z = 36$ ,  $\mathcal{R}_1 : -\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z = 21$  et  $\mathcal{R}_2 : -5x + 6y - \frac{3}{4}z = 3$

- Montrer que les plans sont parallèles.
- Montrer que les plans  $\mathcal{P}$  et sont orthogonaux.
- Montrer alors de deux manières différentes que  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont orthogonaux.

2. On donne les équations cartésiennes de deux plans  $P : x - 4y + 7 = 0$        $Q : x + 2y - z + 1 = 0$ .

- Montrer que ces plans sont sécants.
- On note  $d$  leur droite d'intersection. On dit que la droite  $d$  est représentée par le système d'équation :
 
$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$
, puisqu'un point  $M \in d$  si et seulement si ses coordonnées vérifient le système.  
Déterminer une équation paramétrique de  $d$  en posant  $y = t$  (par exemple).
- En déduire un vecteur directeur de  $d$ .

 **Exercice 16 :** Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan  $(xOy)$  ? d'un plan perpendiculaire à  $(xOy)$  ?

 **Solution :**

Le plan  $(xOy)$  a pour équation  $z = 0$  et le premier plan P cherché a une équation du type :

$$ax + by + cz + d = 0$$

D'après le corollaire précédent on sait que  $(a, b, c)$  et  $(0, 0, 1)$  sont proportionnels, donc  $a = 0$  et  $b = 0$ , par conséquent le plan P a une équation du type (avec  $c \neq 0$ ) :

$$cz + d = 0 \iff z = -\frac{d}{c}$$

Soit P un deuxième plan cherché avec  $\vec{n}(a; b; c)$  un vecteur normal, il a donc une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Mais  $(xOy)$  a pour équation  $z = 0$  et donc pour vecteur normal  $\vec{n}'(0; 0; 1)$ , donc d'après le corollaire on a :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \iff 0a + 0b + c = 0 \iff c = 0$$

D'où le plan P a une équation de la forme :

$$ax + by + d = 0$$

 **Exercice 17 :** Soit  $P : 2x - z = 0$  et  $d : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

Déterminer les coordonnées du point  $A = P \cap d$ .

**Solution :**

Soit  $\vec{n}(2;0;-1)$  un vecteur normal de P et  $\vec{u}(1;-3;0)$  un vecteur directeur de  $d$ , assurons nous que le point A existe :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \neq 0$$

Par conséquent A existe nous pouvons déterminer ces coordonnées, en résolvant l'équation suivante :

$$2(t-1) - 2 = 0 \iff 2t - 2 - 2 = 0 \iff t = 2$$

Ainsi, en remplaçant dans le système paramétrique de  $d$  on obtient  $A(2-1; -3 \times 2; 2)$  i.e  $A(1; -6; 2)$ .



**Exercice 18 :** On donne  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; -1; 1)$ ,  $C(3; -2; 0)$  et  $D(2; -3; 3)$ .

Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

**Solution :**

$\vec{AB}(-1;0;1)$  est un vecteur directeur de (AB). Donc la droite (AB) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(AB) : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

De même  $\vec{CD}(-1;-1:3)$  par conséquent la droite (CD) admet la représentation paramétrique suivante : (CD) :

$$(CD) : \begin{cases} x = -t' + 3 \\ y = -t' - 2 \\ z = 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

$$\text{On résout le système : } \begin{cases} -t + 1 = -t' + 3 \\ -1 = -t' - 2 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -t' + 2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow t = -3 \\ t' = -1 \\ t = 3t' = -3 \end{cases}$$

La troisième équation est compatible avec les deux premières, nous pouvons donc affirmer :

↪ le système admet une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.

↪ Le système admet une unique solution qui est le couple  $(t; t') = (-3; -1)$  donc les droites sont sécantes en un point A, dont on obtient les coordonnées en remplaçant  $t$  ou  $t'$  dans l'une des représentations paramétriques de  $d$  ou  $d'$  :

$$A(4; -1; -3)$$



**Exercice 19 :** Donner une représentation paramétrique de la droite  $d$  définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$P : 2x + y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad Q : x + 3y + 7z - 11 = 0$$

**Solution :**

On peut (même si l'énoncé de l'exercice suggère que la droite  $d$  existe) s'assurer que P et Q sont sécants.

$\vec{n}(2; 1; -1)$  est un vecteur normal de P et  $\vec{n}'(1; 3; 7)$  est un vecteur normal de Q, P et Q sont sécants si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, si c'était le cas, alors on aurait  $\vec{n} = k\vec{n}'$ , dans ce cas on aurait :

$$2 = k \quad \text{et} \quad 1 = 3 = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ce qui absurde, donc P et Q sont deux plans sécants.

Comme  $2x + y - z - 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + z + 2$ , ainsi :

$$x + 3(2x + z + 2) + 7z - 11 = 0 \Leftrightarrow 7x + 10z - 5 = 0 \Leftrightarrow z = -0,7x + 0,5$$

Et du coup :

$$y = 2x - 0,7x + 0,5 + 2 = 0,3x + 2$$

En posant  $x = t$ , on obtient :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 0,3t + 2 \\ z = -0,7t + 0,5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



**Exercice 20** : Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$$P : 2x + 3y - 2z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad Q : 4x - 3y + z - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad R : 2x + 12y - 7z - 2 = 0$$

**Solution :**

Si  $M(x; y; z)$  appartient à l'intersection des trois plans alors  $x$ ,  $y$  et  $z$  vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 4x - 3y + z = 4 \\ 2x + 12y - 7z = 2 \end{cases}$$

De la deuxième équation on tire :  $z = 4 - 4x + 3y$  et en reportant dans les équations 1 et 3 on obtient :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2(4 - 4x + 3y) = 2 \\ 2x + 12y - 7(4 - 4x + 3y) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x - 3y - 10 = 0 \\ 30x - 9y - 30 = 0 \end{cases}$$

On constate alors qu'il suffit de multiplier la première par 3 pour obtenir la deuxième, donc ces deux équations se résument à une seule :

$$x = \frac{3}{10}y + 1$$

Posons alors  $y = 10t$  (avec  $t$  réel), d'où :

$$x = 3t + 1 \quad \text{et} \quad z = 18t$$

Ainsi, les solutions du système sont les triplets  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tels que :

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 10t \\ z = 18t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de la représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}(A; \vec{u})$  avec  $A(1; 0; 0)$  et  $\vec{u}(3; 10; 18)$ .



**Exercice 21** : exercice corrigé et application p 299



**Exercice(s) du livre** : Déclic : 50-64-65-67-68-71-74-79 p 310

81-83-85-86-89-90-97-100-106 p 314

**Trouver des annales !!**