Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°17

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

PARTIE A. **Etude d'une fonction auxiliaire.**

1. On considère la fonction N définie pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par
$$\mathrm{N}(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$$
Calculer les limites de N en -1 et en $+\infty$.
2. Calculer $\mathrm{N}'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction N sur $]-1;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $\mathrm{N}(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1;+\infty[$. Vérifier que $\alpha = 0$.
4. Dresser le tableau de signe de la fonction N.

PARTIE B. **Etude de la fonction f.**

1. On note $g(x) = \dfrac{\ln(1+x}{1+x}$, Calculer $g'(x)$ pour $x > -1$ puis montrer que pour tout $x > -1$ on a :
$$f'(x) = \frac{\mathrm{N}(x)}{(1+x)^2}$$
2. En déduire le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la réprésentation graphique $\mathscr{C}_{\{}$ de la fonction f et de la droite $\mathscr{D}$.

PARTIE C. **Etude d'une suite**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On admet que cette suite converge vers un réel $\ell > -1$.

1. Pour montrer qu'une suite est convergente que démontre-t-on « habituellement ».
2. Déterminer la valeur de ℓ.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°17

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

Soit f et g les fonction définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie A : Étude du sens de variation de f et de celui de g

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$
2. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g ; dresser leur tableau de variations complet.

Partie B : Étude des positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

On considère la fonction d, définie sur $]1;+\infty[$ par $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. (a) Calculer $d'(x)$
   (b) Étudier le sens de variation de d et donner son tableau de variations
   (c) Calculer $d(2)$
   En déduire le signe de $d(x)$, lorsque $x \in]1;+\infty[$
2. En utilisant les résultats précédents :
   (a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun, noté A, dont on donnera les coordonnées
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent au point A la même tangente $\mathscr{T}$, dont on donnera l'équation réduite
   (c) étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$