

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

(10 points)

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

PARTIE A.

1. Construire, en utilisant la droite d'équation $y = x$ et la courbe d'équation $y = x - \ln(x^2 + 1)$, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Que peut-on conjecturer pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

PARTIE B.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Démontrer que pour $x \in [0; 1]$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$$

Dresser le tableau de variation complet de f sur $[0; 1]$ et déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.

PARTIE C.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0; 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

