

~ DEVOIR SURVEILLÉ 3 ~ SUITES-ESPACE-FONCTIONS

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

(4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(2; 1; -1), \quad B(-1; 2; 4), \quad C(0; -2; 3), \quad D(1; 1; -2)$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire, en justifiant, si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. **Affirmation 1** : Les points A, B et C définissent un plan.
2. **Affirmation 2** : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

3. **Affirmation 3** : Une représentation paramétrique du plan (ABD) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t - t' \\ y = 1 - t \\ z = -2 - 5t - t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

4. **Affirmation 4** : La droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2u \\ y = -1 + 3u \\ z = 1 - 4u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

est sécante avec la droite (AC).

Exercice 2.

(7 points)

PARTIE A.

Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^3 + 12x + 4$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Donner α à 10^{-2} près ou proposer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Dresser le tableau de signe de la fonction g .

PARTIE B.

Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 4)^2}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f .

~ DEVOIR SURVEILLÉ 3 ~ SUITES-ESPACE-FONCTIONS

Exercice 3.

(9 points)

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3x+4}$$

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Dresser le tableau de variation complet de f .
 - Justifier que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{3u_n + 4}$$

- Montrer, par récurrence et en utilisant la fonction f , que (u_n) est strictement croissante.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq 4$
 - En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On considère l'algorithme suivant :

 **Algorithme 1 :**

Données:
 u est un nombre réel.
 n est un entier naturel.
 ϵ est un nombre réel strictement positif.
 $n = 0$.
 $u = 0$.

Tant que ($|u - 4| \geq \epsilon$) **Faire**

$n := n + 1$.
$u := \sqrt{3 \times u + 4}$

Fin Tant que
Afficher n

- (a) Afin de découvrir l'affichage de cet algorithme pour $\epsilon = 0,1$. Recopier et compléter le tableau des valeurs prises par les variables n , u et par $|u - 4|$ (On se contentera de valeurs approchées) :

n	0	1
u	0
$ u - 4 $	4

Qu'affiche cet algorithme ?

- (b) Pourquoi est-on sûr qu'à partir d'un certain rang on aura $|u - 4| < \epsilon$?
4. (a) On souhaite montrer que pour tout entier naturel n on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
- Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$4 - u_{n+1} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

ii. En justifiant que $\sqrt{3u_n + 4} \geq 2$ montrer que pour tout entier naturel n on a $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$.

iii. Conclure.

(b) En déduire que : $4 - u_{10} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5 (4 - u_5)$

(c) En déduire que pour $\epsilon = 0,01$, l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 10.