

DEVOIR SURVEILLÉ 1

ARITHMÉTIQUE

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

- Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.
- Déterminer les entiers relatifs n tels que $\frac{3n - 17}{n - 4}$ soit un entier naturel.

Exercice 2.

- Donner la liste des diviseurs de 15. En déduire tous les couples d'entiers relatifs $(a; b)$ tels que $15 = ab$.
- Dans cette question x et y désignent des entiers naturels.
 - Exprimer $4x^2 - 49y^2$ comme produit de deux nombres entiers relatifs p et q avec $p < q$. Préciser p et q et justifier que $q \in \mathbb{N}$.
 - Déduire des deux premiers questions tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ solutions de l'équation $4x^2 - 49y^2 = 15$.
- Donner tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de $4x^2 - 49y^2 = 15$.
On ne demande pas de calcul fastidieux.

Exercice 3.

- Soit n un entier naturel.
 - Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a

$$2^{3k} \equiv 1[7]$$
 - Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2013} par 7?
- Soit a et b deux nombres entiers naturels inférieur ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère $N = a00b$.
 - Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$.
 - En déduire que $N \equiv -a + b[7]$.
 - Déterminer parmi les nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

Exercice 4. A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $19m + 3$ par 26 et on le note p .

Etape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

- Coder le mot EUX.
- Vérifier que $19 \times 11 \equiv 1[26]$.
 - En déduire que $209m + 33 \equiv m + 7[26]$.
 - Montrer que si $19m + 3 \equiv p[26]$ alors $m \equiv 11p - 7[26]$.
On admet que la réciproque est vraie i.e. on admet que si $m \equiv 11p - 7[26]$ alors $19m + 3 \equiv p[26]$.
- Décoder SB.