

∞ DEVOIR MAISON 9 ∞ TVI ET ÉTUDE DE FONCTIONS.

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1.



On se propose de déterminer le nombre de racine(s) du polynôme P définie sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

1. Déterminer P' puis P'' .
2. Dresser le tableau de signe de P'' , puis en déduire le tableau de variation de P' .
3. Déterminer les limites de P' en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que l'équation $P'(x) = 0$ admet exactement une solution α_1 dans \mathbb{R} dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
4. En déduire le tableau de signe de P' puis le tableau de variation de P .
5. Calculer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que $P(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
6. Conclure.
7. On considère le polynôme Q définie sur \mathbb{R} par :

$$Q(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

- (a) Démontrer que $Q'(x) = P(x)$.
- (b) En déduire que l'équation $Q(x) = 0$ admet exactement une solution dans \mathbb{R} dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

Exercice 2.



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
 - (a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2} .¹
 - (b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. (a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - (b) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

- (c) Dressez le tableau de variation de f .
3. Déterminez les abscisses des point B et B' de \mathcal{C} admettant une tangente parallèle à $\Delta : y = x$.²
 4. (a) Vérifiez que $f(\alpha) = \frac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$.³
 - (b) Tracez Δ , \mathcal{C} ainsi que les points A , B , B' et M , N , P d'abscisses respectives 1, 2 et -1 , sans oublier les six tangentes en ces points.

1. emploi classique du corollaire du TVI.
 2. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
 3. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.
 D. Zancanaro
 zancanaro.math@gmail.com