

## ~ DEVOIR MAISON 9 ~ CONGRUENCE - CONJECTURE DE SP

**Tout élève traitera au moins un exercice. A noter que l'exercice 2 a été écarté du DS1 au dernier moment.**

### Exercice 1.



Lors du DS1, l'un d'entre vous (en fait plusieurs) a utilisé un résultat qui n'est pas présent dans le cours dont on va analyser la pertinence. J'ai nommé ce résultat conjecture de SP.

Dans tous l'exercice  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

*Conjecture de SP :*

$$ac \equiv bc[n] \iff a \equiv b[n]$$

1. L'une des deux implications de la conjecture de SP est vraie. Laquelle ? Redémontrer la.
2. Si on suppose que  $c$  est premier et que  $n$  n'est pas un multiple de  $c$ , montrer que la conjecture de SP est vraie.
3. Donner des exemples pour lesquelles la conjecture de SP n'est pas vérifiée.
4. Donner un exemple où  $c$  n'est pas premier mais pour lequel la conjecture de SP est vraie. Expliquer.

### Exercice 2.



On souhaite déterminer le chiffre des unités de  $2^n + 3^n$  selon les valeurs de  $n$ .

1. Compléter le tableau suivant :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de $2^n$ modulo 5								
Reste de $3^n$ modulo 5								
Reste de $2^n + 3^n$ modulo 5								

2. Conjecturer les valeurs des restes de  $2^n + 3^n$  en fonction des valeurs de  $n$ .
3. Pour tout  $k$  et  $n$  entiers naturels, montrer que  $2^n + 3^n$  et  $2^{n+4k} + 3^{n+4k}$  ont même reste dans la division par 5.
4. En déduire l'ensemble des restes possibles de  $2^n + 3^n$  en fonction de  $n$ .
5. Montrer que  $2^n + 3^n$  est impair. En déduire son chiffre des unités en fonction de  $n$ .
6. En déduire le chiffre des unités de  $2^{2013} + 3^{2013}$ .