

~ DEVOIR MAISON 8 ~ CONGRUENCE - CONJECTURE D'APW

Exercice 1.



Lors du DM7, l'un d'entre vous a utilisé un résultat qui n'est pas présent dans le cours dont on va analyser la pertinence. J'ai nommé ce résultat conjecture d'APW.

Dans tous l'exercice $a \in \mathbb{Z}$, n est un entier naturel et r désigne le reste de la division euclidienne de a^2 par n , par conséquent on a :

$$a^2 \equiv r[n]$$

Conjecture d'APW : Si r est un carré parfait alors $a \equiv \sqrt{r}[n]$ ou $a \equiv -\sqrt{r}[n]$.

Partie A : Cas où $n = 9$.

1. Compléter le tableau suivant :

Reste possible de X par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste possible de X^2 par 9									

2. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de a par 9 lorsque $a^2 \equiv 0[9]$?
3. La *conjecture d'APW* est-elle vérifiée lorsque $n = 9$? *On justifiera soigneusement.*
4. Justifier que $a = 15$ est un contre-exemple qui invalide la *conjecture d'APW* ? En proposer un autre.

Partie B : Cas où $n = 5$.

1. Compléter le tableau suivant :

Reste possible de X par 5	0	1	2	3	4
Reste possible de X^2 par 5					

2. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de a par 5 lorsque $a^2 \equiv 0[5]$? lorsque $a^2 \equiv 1[5]$? lorsque $a^2 \equiv 4[5]$?
3. La *conjecture d'APW* est-elle vérifiée lorsque $n = 5$? *On justifiera soigneusement.*

Partie C : Cas où n est un nombre premier.

On rappelle ou on donne un résultat (que je démontrerai très prochainement) :

Lemme 1.

Lemme d'euclide

Si p , un nombre premier, divise le produit ab alors il divise a ou il divise b .

1. On suppose que $a^2 \equiv b^2[n]$, montrer en utilisant le lemme d'euclide, que $a \equiv b[n]$ ou que $a \equiv -b[n]$.
2. En déduire que la *conjecture d'APW* est vraie lorsque n est premier.