∽ DEVOIR MAISON 6 ∽
CONGRUENCE

Vous traiterez au moins un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1. ♠♠

Les questions sont indépendantes.

1. Pour quelles valeurs de l'entier relatif m la fraction $\dfrac{2m-5}{m+8}$ est-elle elle-même un entier ?
2. k étant un entier relatif, on pose : $x = 2k-1$ et $y = 9k+4$.
   Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17.
3. Déterminer les entiers naturels u et v vérifiant la relation : $u^2 - 4v^2 = 12$
4. n est un entier naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^2+5n+1$ est impair .
   En déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

Exercice 2. ♠♠

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
2. En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
3. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$, on considère $\mathrm{A}_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
   (a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n+1$, alors A_p est divisible par 7.
   (c) Etudier le cas où $p = 3n+2$.

Exercice 3. ♠♠♠♠

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. (a) Pour $1 \leq n \leq 6$, déterminer r tel que
   $$3^n \equiv r[7] \quad \text{et} \quad 0 \leq r < 7$$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel k : $3^{6k}-1 \equiv 0[7]$
   (c) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n \equiv 0[7]$.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   (d) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
   (e) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
   (f) En déduire que, pour tout entier naturel n, 7 ne divise pas 3^n.
2. Soit $\mathrm{U}_n = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) En utilisant une suite géométrique que l'on précisera montrer que $\mathrm{U}_n = \dfrac{3^n-1}{2}$ En déduire que 2 divise 3^n-1.
   (b) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors 3^n-1 est divisible par 7.
   (c) Réciproquement, montrer que si 3^n-1 est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.