∽ DEVOIR MAISON 4 ∾
SUITES MONOTONES ET LIMITES

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les six suivants. En traiter au moins deux est conseillé. Si vous ne vous sentez pas encore à l'aise avec les suites, il est inutile de tourner la page.

Exercice 1. Théorème de convergence monotone. ♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
2. On **admet** que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 2. ♠♠

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

On admet que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$
Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n < 1$$

Indication : Pour montrer que $\mathscr{P}$ est héréditaire, on introduira la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$ et on étudiera ses variations.

Exercice 3. Théorème de convergence monotone. ♠♠

Soit (u_n) une suite décroissante et strictement positive.
Montrer que la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$ est convergente. [1]

Exercice 4. Théorème de comparaison. ♠♠

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + u_n^2 + 1$$

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
2. Ecrire et programmer un algorithme qui demande de saisir deux réels M et a et qui affiche le premier rang p pour lequel $u_p > \mathrm{M}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(n) : u_n \geq a + n$. Montrer par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

1. On montrera que v est strictement croissante et majorée.

Exercice 5. ♠♠♠♠

On considère la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$
3. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$$
.
4. Déterminer un réel M qui majore u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que u converge.

Exercice 6. ♠♠♠♠♠♠

On considère la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On considère pour $\mathrm{A} \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}$ définie par :

$$\mathscr{P}(\mathrm{A}) : \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > \mathrm{A}$$

1. L'objectif de cette question est de démontrer la propriété $\mathscr{P}$ par récurrence.
   (a) Montrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   (b) Montrer que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   (c) Supposons que $\mathscr{P}(\mathrm{A})$ soit vraie.
      i. Traduire, par une phrase en français, la supposition que l'on a effectué.
      ii. Montrer que $u_{2n_0} > u_{n_0} + \frac{1}{2}$. En déduire que $u_{4n_0} > u_{n_0} + 1$
      iii. En déduire que $\mathscr{P}(\mathrm{A}+1)$ est vraie.
   (d) Conclure.
2. Utiliser la question 1 pour déterminer la limite de la suite u.