

≈ DEVOIR MAISON 25 ≈ LOI NORMALE ET ÉCHANTILLONNAGE

Exercice 1. Une entreprise de confitures annonce sur ses emballages une teneur en fruits de 60 grammes pour 100 grammes de confitures.

Le procédé de fabrication est soumis à quelques aléas. On considère que la teneur en fruits pour 100 g de confitures fluctue selon la loi $\mathcal{N}(60;9)$ (c'est-à-dire la loi normale d'espérance $\mu = 60$ et $\sigma = 3$).

PARTIE A.

1. Quelle est la probabilité que la teneur en fruits soit différente de plus de 5 grammes de la valeur annoncée sur l'emballage ?
2. Dans quel intervalle fluctue la teneur en fruits avec une probabilité de 0,95 ?

Indication : On rappelle le résultat suivant :

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.683$ puis $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.954$ et enfin $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$

Ces résultats ne satisfont pas le service qualité de l'entreprise : en présence de trop peu de fruits, le client risque de dénoncer une publicité mensongère et à l'inverse, l'excès de fruits augmente le coût de fabrication d'un pot de confiture et diminue sa rentabilité. Le service qualité demande au service technique de modifier l'écart-type σ pour rendre la teneur en fruits moins fluctuante.

3. Celui-ci doit-il pour cela augmenter ou diminuer la valeur de σ ?
Plus précisément, le service qualité souhaite que la teneur en fruits fluctue désormais à 95% dans l'intervalle $[58;62]$.
4. Quelle valeur de σ le service technique doit-il atteindre ?
5. Avec cette nouvelle valeur de σ , quelle est la probabilité que la teneur en fruits soit différente de plus de 5 grammes de la valeur annoncée ?

PARTIE B.

Afin de tester le service technique, le service prélève 300 pots de confiture au hasard. Si le service technique a atteint son objectif alors la probabilité p que la teneur en fruits d'un pot de confiture soit dans l'intervalle $[58;62]$ vaut 0,95.

Le service qualité constate qu'il y a 10 pots de confitures dont la teneur en fruits n'est pas dans l'intervalle $[58;62]$. Peut-on affirmer que le service technique a atteint son objectif ?