

∞ DEVOIR MAISON 22 ∞ COMPLEXE

Exercice 1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n .
 (c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|------------|--|
| Variables | n entier naturel R réel P réel strictement positif |
| Entrée | Demander la valeur de P |
| Traitement | R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que |
| Sortie | Afficher n |

- (a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?
- (b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme?
4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .
 (b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
 Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
 (c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9 .
 Les traits de construction seront apparents.