∾ DEVOIR MAISON 20 ∾
INTÉGRATION

Dans ce devoir maison, les élèves désirant intégrer une classe préparatoire scientifique traiteront l'exercice 2, les autres traiteront l'exercice 1.

Exercice 1. PARTIE A.

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

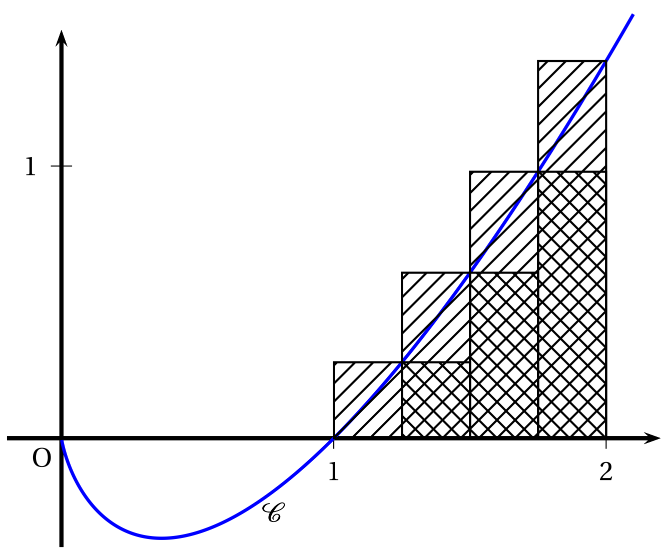
1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels

U, V sont des nombres réels

Initialisation

U et V prennent la valeur 0, n prend la valeur 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

$\quad \mathrm{U} := \mathrm{U} + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$

$\quad \mathrm{V} := \mathrm{V} + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher U et V

1. (a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
   (b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
   (c) En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_n &= \frac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ \mathrm{V}_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+f(2)\right]\end{aligned}.$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $\mathrm{U}_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant \mathrm{V}_n$.

(a) Trouver le plus petit entier n tel que $\mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n < 0,1$.

(b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

PARTIE C.

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

<u>Exercice</u> 2. **Intégrale de Wallis et Intégration par parties**

PARTIE A. **Intégration par parties.**

Théorème 1.

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle $[a;b]$, alors on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

1. Rappeler la formule permettant de dériver le produit $u(t)\times v(t)$ puis à partir de cette égalité, par passage à l'intégrale démontrer le théorème.
2. En utilisant le théorème, calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b te^t dt$ puis $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$.

PARTIE B. **Intégrales de Wallis**

On considère pour $n \in \mathbb{N}$ les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\, dt$$

1. Calculer I_0 puis I_1.
2. En posant $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$ et appliquant le théorème 1, montrer que :

$$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$$

3. En déduire I_3 et I_4.
4. Montrer que :

$$\mathrm{I}_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}\left(p!\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$