∾ DEVOIR MAISON 19 ∾
INTÉGRATION

Dans ce devoir maison, il est obligatoire de traiter une page. Les élèves qui ont obtenu au bac blanc une note inférieure ou égale à 7 traiteront les exercices de la page 1, ce qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 14 traiteront ceux de la page 2, les autres ont le choix.

Exercice 1. Soit $f(x) = \dfrac{x^2+5x-1}{x+2}$ pour $x \in]-2;+\infty[$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in]-2;+\infty[$:
$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+2}$$
2. En déduire la primitive de f sur $]-2;+\infty[$ qui s'annule en 1.
3. Montrer que pour $x > 1$ on a :
$$f(x) > 0$$
Indication : On pourra dresser le tableau de signe de x^2+5x-1
4. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définit par :
$$\mathscr{D} = \{M(x;y) \in \mathscr{P}, 1 \leq x \leq e \qquad \text{et} \qquad 0 \leq y \leq f(x)\}$$
Indication : Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$.
5. L'unité sur l'axe des abscisses vaut 2 cm, celle sur l'axe des ordonnées 0.5 cm. Donner l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2.

Exercice 2. Calculer les intégrales proposées :

1. $\displaystyle\int_1^3 t+\frac{1}{t}dt$ (interpréter le résultat graphiquement)
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x+2}}$ (interpréter le résultat graphiquement)
3. $\displaystyle\int_3^4 \frac{2x}{x^2-5}dx$ (interpréter le résultat graphiquement)
4. $\displaystyle\int_0^1 te^{t^2}dt$ (interpréter le résultat graphiquement)

Exercice 3. Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ pour $x \in]1;+\infty[$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in]1;+\infty[$:
$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$
2. En déduire la primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui vaut 3 en 2.
3. Montrer que pour $x > 1$ on a :
$$f(x) > 0$$
4. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définit par :
$$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{P}, 1 \leq x \leq e \qquad \text{et} \qquad 0 \leq y \leq f(x)\}$$
5. L'unité sur l'axe des abscisses vaut 2 cm, celle sur l'axe des ordonnées 0.5 cm. Donner l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2.

Exercice 4.
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.
PARTIE A.
La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $\mathrm{A}\left(1\,;\,\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)$ et, sur $[0\,;\,1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{e}}$
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$

PARTIE B.
On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3+x^2+x-1$.
   Etablir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   (b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-2n}\right)$.
   (c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.