∾ DEVOIR MAISON 18 ∾
LOGAIRTHME NÉPÉRIEN

Dans ce devoir maison, il est obligatoire de traiter un exercice. Les élèves qui ont obtenu au bac blanc une note inférieure ou égale à 7 traiteront l'exercice 1, ce qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 12 traiteront l'exercice 2, les autres ont le choix de l'exercice.

Exercice 1.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

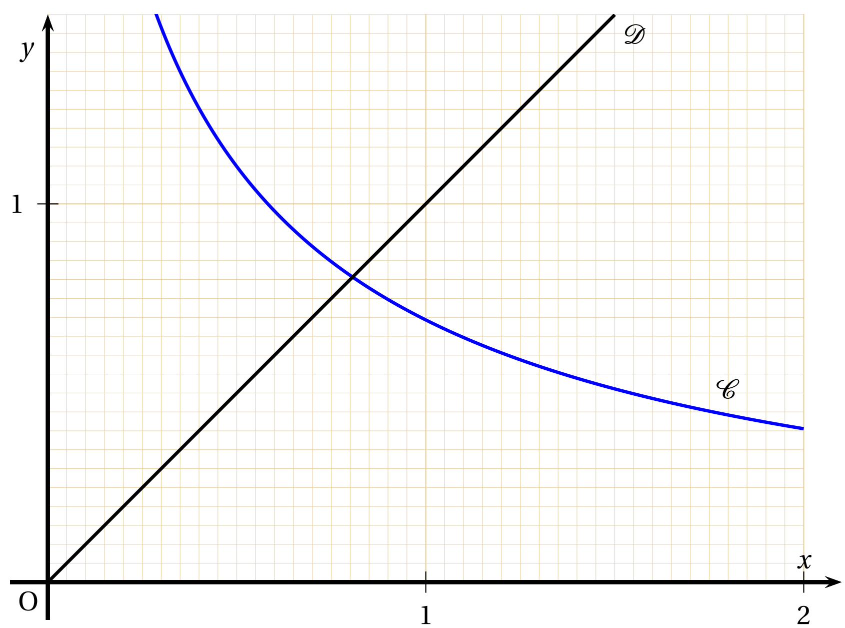
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
   On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.



   (a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   (b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes? On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON. Aucune justification n'est demandée.
   - ★ Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
   - ★ Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
   - ★ Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

   (c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.
   Montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = \ell$.

   (d) Montrer que $\ell = \alpha$.

Exercice 2. On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'équation

$$\mathrm{E}_a :\ x^a = a^x.$$

On rappelle que pour tout $\lambda > 0$ et pour tout réel x on a :

$$\lambda^x = e^{\ln \lambda^x} = e^{x \ln \lambda}$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - \mathrm{e} \ln x$.
   (a) **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   (b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   (c) Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   (a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   (b) Ëtudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :
   (P_1) : si $a \in]0\ ;\ 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
   (P_2) : si $a \in]1\ ;\ \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ \mathrm{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.