∾ Devoir Maison 17 ∾
Logairthme Népérien

Dans ce devoir maison, il est obligatoire de traiter un exercice. Les élèves qui ont obtenu au bac blanc une note inférieure ou égale à 7 traiteront l'exercice 1, ce qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 12 traiteront l'exercice 2, les autres ont le choix de l'exercice.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   (b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   (c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
   Indication : On pourra raisonner par récurrence.

   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   Indication : On pourra raisonner par récurrence.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
5. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n < 0,001$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 0.5
Traitement :	
Sortie :	