

~ DEVOIR MAISON 16 ~ PRÉPARATION BB

Tout élève poursuivra ses efforts pour améliorer les résultats de son DM14 ou traitera l'exercice suivant.

Exercice 1. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 & t \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(3u_{n+1} - u_n) & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. A l'aide d'un tableur, calculer les 30 premiers termes de la suite.
Quelle conjecture peut-on faire quant au comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On pose , pour tout entier n ,

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = AU_n$$

- (b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0$$

4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer PQ et QP .
- (b) Vérifier que la matrice QAP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
- (c) Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nQ$$

(d) En admettant que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$, déterminer l'expression de A^n .

5. Dédire des questions 3.b et 4.d., un expression de u_n en fonction de n .
6. Etudier la convergence de la suite (u_n)