

∞ DEVOIR MAISON 14 ∞ RETOUR DE L'ARITHMÉTIQUE

Tout élève en fera au moins pour 3 ♠.

Exercice 1. Nombres premiers

♠♠

1. Démontrer l'égalité dite « égalité de Sophie Germain » :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

2. En utilisant cette égalité, répondre aux questions (indépendantes) suivantes :

- Démontrer que le nombre $p = 2^{1794} + 723^4$ n'est pas un nombre premier.
- Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , $n^4 + 4$ est-il premier ?

Exercice 2. Nombre parfaits

♠♠♠

Définition : Dire qu'un entier naturel n est parfait signifie que la somme de tous ses diviseurs positifs est égale à $2n$.

1. Montrer que :

$$\forall x \neq 1, \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Indication : On pourra calculer $(1 - x) \sum_{i=0}^n x^i$.

2. Démontrer que 28 est un nombre parfait.
3. p désigne un nombre premier tel que $q = 2^p - 1$ soit premier.

- Déterminer les diviseurs positifs de 2^{p-1} .
- Déterminer les diviseurs positifs de $2^p - 1$.
- Calculer la somme des diviseurs positifs de l'entier $E^p = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

Remarque : Les nombres E_p sont appelés nombres d'Euclide.

- En déduire que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.
- Déterminer alors trois nombres parfaits.

4.

♠♠♠♠♠

p et q désignent des nombres premiers distincts supérieurs ou égaux à 3 et α et β sont des entiers naturels non nuls ; on note $n = p^\alpha q^\beta$.

- Déterminer les diviseurs positifs de p^α et de q^β .
- Démontrer que la somme S des diviseurs positifs de n est donnée par :

$$S = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}$$

- Démontrer que n est parfait, si et seulement si $p^\alpha q^\beta ((p-2)(q-2)-) = 1 - p^{\alpha+1} - q^{\beta+1}$.
- En étudiant le signe de chaque membre, démontrer qu'il ne peut pas exister de nombres parfaits impairs dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne contienne que deux facteurs premiers distincts.
- Démontrer que s'il existe un nombre parfait impair, il est supérieur à 105.

Remarque : On ignore, à l'heure actuelle, s'il existe des nombres parfaits impairs.