

∞ DEVOIR MAISON 13 ∞ MATRICE - VERS LE BAC...

Exercice 1.



On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1^{er} janvier 2013, cette région comptait 250000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1^{er} janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n .

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b , les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer PQ et QP . En déduire la matrice B telle que $PB = I_2$ et $BP = I_2$.
- (b) Vérifier que la matrice BAP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
- (c) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nB$.
- (d) Calculer en fonction de n , la matrice A^n .
- (e) Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?