∽ DEVOIR MAISON 10 ∽
RÉVISIONS : SUITES, ESPACES, FONCTIONS.

Ce devoir maison de révisions, de préparation au DS3 est facultatif. Il est cependant fortement conseillé de faire tous les exercices.

Exercice 1. ♠♠ à ♠♠♠♠

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $[-2;+\infty[$.

   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-2;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer, par récurrence et en utilisant la fonction f que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et un majorant de (u_n).

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ. Que peut-on préciser pour ce réel ℓ ?
5. Justifier que $\ell = f(\ell)$ et déterminer ℓ.
6. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
ϵ est un nombre réel strictement positif.
$n = 0$ et $u = -1$.
Tant que $(|u-2| \geq \epsilon)$ **Faire**
  $n := n+1$ et $u := \sqrt{u+2}$
Fin Tant que
Afficher n

7. (a) Afin de découvrir l'affichage de cet algorithme pour $\epsilon = 0,1$, recopier et compléter le tableau des valeurs prises par les variables n, u et par $|u-2|$:

n	0	1	…	…
u	-1	…	…	…
$\lvert u-2 \rvert$	3	…	…	…

   Qu'affiche cet algorithme ?

   (b) Pourquoi est-on sûr qu'à partir d'un certain rang la condition $|u-2| \geq \epsilon$ ne sera pas vérifiée ?

8. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$2 - u_{n+1} = \frac{2-u_n}{\sqrt{2+u_n}+2}$$

(b) En justifiant que $1 \leq \sqrt{2+u_n}$ montrer que pour tout entier naturel n on a : $\dfrac{1}{\sqrt{2+u_n}+2} \leq \dfrac{1}{3}$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $2-u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3} \times (2-u_n)$

(d) En déduire que : $2-u_6 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 (2-u_3)$

(e) En déduire que pour $\epsilon = 0,01$, l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 6.

Exercice 2. ♠♠

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $\mathrm{A}(1;-2;-1)$ et $\mathrm{B}(3;-5;-2)$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2-t' \\ y = 1+2t' \\ z = t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$

   Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $\mathrm{C}(0;-3;0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$

   (a) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

   (b) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ contient la droite (AB).
4. On considère la sphère de diamètre [AB].

   (a) Donner une équation de cette sphère.

   (b) Déterminer le nombre de points d'intersection entre cette sphère et la droite (d)

Exercice 3. ♠♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$$

On souhaite résoudre l'équation (E) : $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

1. Où l'on montre que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $[-2;2]$.

   (a) Montrer que si $x > 2$ alors $-\dfrac{x}{2} < -1$. En déduire que $f(x) \neq 0$ lorsque $x > 2$.

   (b) Montrer que si $x < -2$ alors $-\dfrac{x}{2} > 1$ et en déduire de nouveau que $f(x) \neq 0$ pour $x < -2$.

   (c) En déduire que toutes les solutions de l'équation (E) se trouvent dans l'intervalle $[-2;2]$.
2. Où l'on étudie la fonction f.

   (a) Résoudre, à l'aide d'un cercle trigonométrique, l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.

   (b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.

   (c) En déduire le tableau de variations de f pour $x \in [-\pi;\pi]$.
3. Où l'on conclut.

   (a) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).

   (b) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.