BACCALAUREAT GENERAL GRIS

SESSION 2014

MATHEMATIQUES-SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **9**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Maths

Terminale Scientifique

TS2-TS3
SPÉCIALITÉ

Sujet Bac Gris

Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Exercice 1. (5 points)

On considère l'équation (E) où x et y désignent des nombres entiers :

$$135x - 352y = 1$$

1. (a) Déterminer le PGCD de 135 et de 352.
   (b) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution.
2. (a) Montrer que si le couple $(x; y)$ est solution de (E) alors on a $135x \equiv 1[352]$
   (b) Réciproquement, démontrer que si x est un entier tel que $135x \equiv 1[352]$ alors il existe un entier relatif k tel que le couple $(x; k)$ soit solution de (E).
3. (a) Montrer, « **en remontant l'algorithme d'Euclide** », que le couple $(-73; -28)$ est solution de (E).
   (b) Déterminer l'ensemble des couples solutions de l'équation (E).
   (c) Montrer qu'il existe un unique nombre entier x tel que $1 < x < 352$ et $135x \equiv 1[352]$ puis déterminer cet entier.
4. Bob veut transmettre à Alice un message codé, mettons la date à laquelle ils vont organiser une surprise pour Emmy (par exemple, le 18). Bien entendu le message ne doit pas être intercepté par Emmy…
   Protocole de cryptage :
   Alice diffuse au monde les nombres $n = 391$ et $e = 279$ (elle conserve en secret le nombre $d = 135$). Toute personne peut envoyer un message crypter à Alice en respectant la procédure suivante :
   – Pour crypter un message M, on détermine $0 \leq C < n$ tel que $M^e \equiv C[n]$ que l'on envoie à Alice.
   – Pour décrypter le message C, Alice détermine $0 \leq D < n$ tel que $C^d \equiv D[n]$ qui vaut donc $D = M$.

   (a) Donner la décomposition en produit de facteur premier de 279.
   Vérifier que $18^{31} \equiv 35[391]$ puis en déduire $18^{279}[391]$ En déduire le message crypté que Bob transmet à Alice.
   (b) Vérifier qu'Alice peut décrypter le message correctement.

Exercice 2. (5 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N et K sont des entiers, U, V, W sont des réels
Début :	K := 0 et U := 2 et V := 10
	Saisir N
	Tant que K < N
	Affecter K + 1 à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U et V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   (b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$. En déduire que $v_n - u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Exercice 3. (6 points)

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

PARTIE A.

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

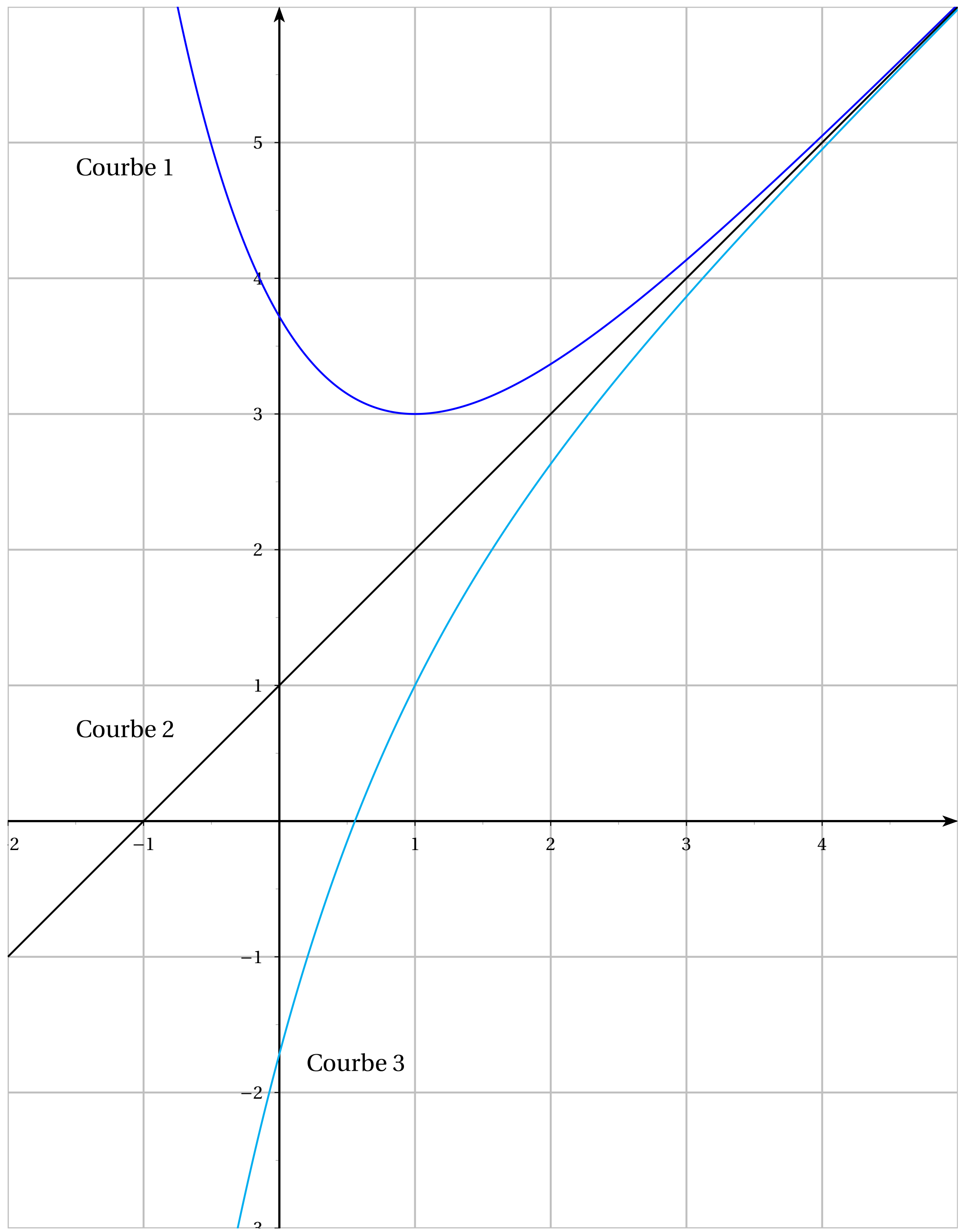
PARTIE B.

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x+1-m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté, page suivante, les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation
   $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.
4. (a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur la page suivante.
   (b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.


Courbe 1
Courbe 2
Courbe 3
5
4
3
2
1
−1
−2
2
−1
1
2
3
4

Exercice 4. (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. On dispose de trois urnes contenant chacune un certain nombre de boules colorées, comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

	Boules Bleues	Boules Rouges
Urne 1	1	3
Urne 2	3	2
Urne 3	4	2

On tire au hasard une urne, puis une boule de cette urne.
La boule tirée est bleue, mais quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

(a) $\frac{27}{80}$ (b) $\frac{15}{91}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$

2. Le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca[1] est un ancien boxeur, aveugle et parkinsonien. Il arrache les dents de ses patients au hasard. Les syldaves venant le consulter ont toujours une seule dent de malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent encore avant l'intervention des tenailles ou des poings, c'est selon. Le dentiste arrache toujours exactement une dent par patient (malade ou saine suivant la chance du patient). On note X le nombre de dents malades extraites à bon escient après avoir traité n patients par le dentiste.
Combien doit-il traiter de personnes au minimum pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à $0,6$?

a. 9 **b.** 19 **c.** 29 **d.** 39

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points A$(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, B$(-1\ ;\ 5\ ;\ 4)$ et C$(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t \\ z = t+4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t+4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ **c.** $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point D$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(-3\ ;\ -5\ ;\ 1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
(b) La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.
(c) La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
(d) La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

1. La capitale de la Syldavie.